ГЛАВА 1.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОБСТВЕННЫХ АКУСТИЧЕСКИХ И ТЕПЛОВЫХ ВОЛН В ЛИНЕЙНОМ АКУСТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Взаимодействие собственных акустических и тепловых волн представляет собой классическую задачу деформируемой сплошной среды. Связь акустического и температурного полей вводил еще Дюгамель [1]. Попытки термодинамического обоснования этой связи были предприняты позднее Фойхтом [2], Джеффрисом [3] и Био [4]. Развитие работ по термоупругости было систематизировано Новацким [5]. Однако в этих работах не учитывалась вязкость среды, поскольку основное внимание уделялось деформации твердого тела.

§ 1.1. СВЯЗАННАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ В ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ.

Воспользуемся уравнениями движения сплошной среды в эйлеровском представлении [6]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{1.1}$$

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right] = -\nabla p + \eta\,\Delta\mathbf{v} + \left(\xi + \frac{1}{3}\eta\right) grad\, div\,\mathbf{v}\,, \tag{1.2}$$

$$\rho T\left[\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)s\right] = div(\kappa\nabla T) + \frac{\eta}{2}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right]^2 + \xi\,(div\,\mathbf{v})^2\,. \tag{1.3}$$

Здесь ρ - плотность, $\mathbf{v}$ - колебательная скорость, p - давление, T - температура, s - энтропия, ξ,η - объемная и сдвиговая вязкости среды, κ - теплопроводность среды.

Для получения замкнутой системы уравнения (1.1)-(1.3) необходимо дополнить уравнениями состояния

$$p = p(\rho, s),$$

$$T = T(\rho, s).$$

Так как в данном случае мы ограничиваемся линейным акустическим приближением, то достаточно ввести малые приращения равновесных значений параметров:

$$\rho = \rho_0 + \rho', \qquad s = s_0 + s' \tag{1.4}$$

и разложить уравнения состояния в ряд с точностью до линейных по возмущениям членов [7]:

$$p = p_0 + c_0^2 \rho' + \rho_0 c_0^2 \beta T_0 s' \big/ c_p, \tag{1.5}$$

$$T = T_0 + c_0^2 \beta T_0 \rho' \big/ \rho_0 c_p + T_0 s' / c_v. \tag{1.6}$$

Здесь $c_0^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$ - квадрат адиабатической скорости звука, $\beta = -\rho^{-1} (\partial \rho / \partial T)_p$ - коэффициент теплового расширения среды, и c_p, c_v - удельные теплоемкости.

Отсутствие связи тепловой и акустической волн соответствует равенство нулю коэффициента теплового расширения, при этом обращаются в нуль перекрестные члены в (1.5)-(1.6). Последнее слагаемое в (1.5) описывает термоупругие эффекты - возбуждение акустической волны за счет тепловой. Второе слагаемое (1.6) дает изменение температуры за счет акустической волны и делает задачу термоупругости собственно связанной [5]. Если этим слагаемым пренебрегают, то такая задача термоупругости называется несвязанной [5], так как температурное поле может быть определено независимо от акустического.

Линеаризуем систему (1.1)-(1.3) с учетом (1.4) и уравнений состояния (1.5)-(1.6). Тогда она приобретает вид [8]:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \, div\, \mathbf{v} = 0 \,, \tag{1.7}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -c_0^2 \, grad\, \rho' - \frac{\rho_0 c_0^2 \beta T_0}{c_p} grad\, s' + \left(\xi + \frac{4}{3}\eta \right) grad\, \mathbf{v} - \eta\, rot\, rot\, \mathbf{v} \quad , \tag{1.8}$$

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial s'}{\partial t} = \frac{T_0}{c_v} \kappa \Delta s' + \frac{c_0^2 \beta T_0}{\rho_0 c_p} \kappa \Delta \rho' \quad . \tag{1.9}$$

Как видно из (1.8), вихревая компонента скорости не связана ни с плотностью, ни с температурой и диффузионно затухает. Поэтому мы будем предполагать движение среды потенциальным

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi \quad . \tag{1.10}$$

Тогда система (1.7)-(1.9) сведется к двум уравнениям:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \varphi - \frac{\xi + \frac{4}{3}\eta}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi + \frac{c_0^2 \beta T_0}{c_p} \frac{\partial s'}{\partial t} = 0 \quad , \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial^2 s'}{\partial t^2} - \frac{\kappa}{\rho_0 c_v} \frac{\partial}{\partial t} \Delta s' + \frac{c_0^2 \beta}{\rho_0 c_p} \kappa \Delta^2 \varphi = 0 \quad . \tag{1.12}$$

Система (1.11)-(1.12) представляет связанную систему акустической (φ) и тепловой (s') волн, распространяющихся совместно. Дисперсионное уравнение для системы (1.11)-(1.12) имеет вид $\left(\varphi, s' \;\sim\; \exp\left(-i\omega t + i(\mathbf{k}\mathbf{r})\right)\right)$

$$\left(-\omega^2 + c_0^2 k^2 + i\omega k^2 \frac{\left(\xi + \frac{4}{3}\eta\right)}{\rho_0} \right) \left(-i\omega + \gamma \chi k^2 \right) - c_0^2 (\gamma - 1) \chi k^4 = 0 \,. \tag{1.13}$$

Здесь $\chi = \kappa / \rho_0 c_p \,, \gamma = c_p / c_v = 1 + c_0^2 \beta^2 T_0 / c_p$ [7]- температуропроводность

и отношение теплоемкостей среды.

Как видно, в отсутствие связи акустических и тепловых волн $(\beta = 0, \;\; \gamma = 1)$ уравнение (1.13) факторизуется на уравнения акустической

$$\omega^2 - c_0^2 k^2 + i\omega k^2 \frac{\xi + \frac{4}{3}\eta}{\rho_0} = 0 \tag{1.14}$$

и тепловой

$$-i\omega + \gamma\chi k^2 = 0 \tag{1.15}$$

моды. Тепловая волна носит чисто диффузионный характер:

$$k_T^{(0)} = \mp\sqrt{i\omega/\gamma\chi} \tag{1.16}$$

и затухает на расстояниях порядка длины волны $\left(\left|\operatorname{Re} k_T^{(0)}\right|\right) \approx \left(\left|\operatorname{Im} k_T^{(0)}\right|\right)$. Для акустической волны мнимая часть волнового вектора должна быть мала по сравнению с его действительной частью (иначе затухание слишком велико и звуковой волны как таковой не существует). Поэтому

$$\omega k^2 \frac{\xi + \frac{4}{3}\eta}{\rho_0} << c_0^2 k^2 , \tag{1.17}$$

что оказывается оправданным вплоть до высоких гигагерцовых частот. Это позволяет записать приближенное выражение для (1.14):

$$k_A^{(0)} = \pm\frac{\omega}{c_0}\left[1 + i\frac{\omega}{2\rho_0 c_0^2}\left(\xi + \frac{4}{3}\eta\right)\right]. \tag{1.18}$$

Для конденсированных сред в диапазоне частот вплоть до гигагерц

$$\left|k_A\right| << \left|k_T\right|.$$

Это условие равносильно (обычно $\gamma \sim 1$)

$$\omega << c_0^2 \big/ \chi = \omega_\chi \tag{1.19}$$

(величину $c_0^2 \big/ \chi$ для некоторых сред смотрите в таблице 1.1), которое

Таблица 1.1

Вещество	Al	H_2O	C_2H_5OH	Hg	SiO_2
c_0^2 / χ , c^{-1}	$4.5 \bullet 10^{11}$	$1.9 \bullet 10^{13}$	$1.4 \bullet 10^{13}$	$1.4 \bullet 10^{11}$	$6.2 \bullet 10^{13}$
$\gamma - 1$	$3.0 \bullet 10^{-2}$	$3.6 \bullet 10^{-3}$	0.34	$4.9 \bullet 10^{-2}$	$6.0 \bullet 10^{-6}$
$c_v / \beta \chi$, c^{-1}	$1.4 \bullet 10^{11}$	$1.6 \bullet 10^{14}$	$2.9 \bullet 10^{13}$	$5.5 \bullet 10^{10}$	$2.3 \bullet 10^{15}$
βT_0	$1.4 \bullet 10^{-2}$	$6.0 \bullet 10^{-2}$	0.33	$5.4 \bullet 10^{-2}$	$2.1 \bullet 10^{-4}$

выполняется для конденсированных сред во всем диапазоне частот вплоть до гигагерц. Поэтому в диапазоне (1.19) связь тепловых и акустических волн слабая и (1.13) приводит лишь к поправкам к волновым векторам (1.16) и (1.18):

$$k_T = \mp \left(i\omega / \chi \right)^{1/2} , \tag{1.20}$$

$$k_A = \mp \frac{\omega}{c_0} \left[1 + i \frac{\omega}{2 \rho_0 c_0^2} \left(\xi + \frac{4}{3}\eta + \left(\gamma - 1 \right) \rho_0 \chi \right) \right]. \tag{1.21}$$

Из сравнения (1.20) с (1.16) видно, что связь тепловой и акустической волны приводит к изменению в $\sqrt{\gamma}$ раз модуля волнового вектора k_T. Поскольку $\gamma - 1 \ll 1$ (см. табл. 1.1) (за исключением органических сред), то эта поправка не существенна. Влияние тепловой волны на акустическую выражается в дополнительном затухании звука (1.21), вызванном диффузией тепла из адиабатически сжатых областей. Пока скорость тепловой волны мала (выполняется условие (1.19)) это затухание достаточно мало - акустическая волна успевает пробежать много длин волн прежде чем затухнет. В проводящих твердых телах, однако, это дополнительное затухание может существенно превышать вязкое.

Таким образом, в общем случае в среде распространяются связанные квазиакустические и квазитепловые волны, которые содержат как акустическую, так и тепловую компоненты [5]:

$$\varphi = \varphi_0 \exp\left(-i\omega t + i\left(\mathbf{k}_A \mathbf{r}\right)\right) + \left(\gamma - 1\right)\frac{\chi}{2} s_0 \exp\left(-i\omega t + i\left(\mathbf{k}_T \mathbf{r}\right)\right) \qquad (1.22)$$

$$s' = \frac{\beta\,\chi\,\omega^2}{c_0}\varphi_0 \exp\left(-i\omega t + i\left(\mathbf{k}_A \mathbf{r}\right)\right) + s_0 \exp\left(-i\omega t + i\left(\mathbf{k}_T \mathbf{r}\right)\right). \qquad (1.23)$$