## § 1.2. МАЛЫЕ ПАРАМЕТРЫ В СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ.

Выражения (1.22), (1.23) справедливы в определенных условиях: прежде всего, это выполнение (1.19). Оно удовлетворяется во всем диапазоне частот вплоть до гигагерц. Очевидно, что на более высоких частотах проведенный анализ в общем теряет смысл ввиду значительного затухания акустической волны и сравнимости длины ее пробега с длиной волны. С другой стороны, при криогенных температурах это условие может нарушаться уже при ультразвуковых частотах, однако в этом случае заведомо неприменимо уравнение диффузии тепла (1.3).

Таким образом, естественным, практически обоснованным приближением является отношение $\omega/\omega_\chi \ll 1$ - рассматриваемый диапазон частот ограничен сверху частотой перехода от адиабатического к изотермическому распространению звука. Аналогичное приближение имеет место и для диффузной сдвиговой волны:

$$\omega \ll \frac{\rho_0 c_0^2}{\left(\xi + \frac{4}{3}\eta\right)} = \omega_\nu .$$

По порядку величины это соотношение приводит к ограничениям, близким к (1.19). Фактически оба эти требования означают, что диффузионные процессы должны быть более медленными, нежели акустические. Эти естественные ограничения связаны, очевидно, просто с физической обоснованностью модели (1.2)-(1.3).

Указанные выше ограничения, отражают одновременно границу применимости приближения несвязанной модели термоупругости [5] .

Обратное влияние возбуждаемой квазиакустической волны на тепловую (или наоборот) характеризуется коэффициентом

$$(\gamma - 1)\left(\frac{\omega\chi}{c_0^2}\right)^2 ,$$

который будет мал при выполнении условия (1.19). Таким образом, в рамках рассматриваемых приближений (1.1)-(1.3) (достаточным во многих практических случаях) условие (1.19) определяет границу применимости теории и позволяет ограничиться несвязанной задачей термоупругости (тепловое поле определяется независимо от акустического).

Более наглядно взаимное влияние тепловых и акустических волн может быть выявлено при введении "естественных" безразмерных параметров : числа Маха -

$$M_a = v / c_0 \tag{1.24}$$

и возмущения энтропии -

$$M_s = s_0 / c_v \tag{1.25}$$

Тогда квазиакустическая и квазитепловая волны (1.22)-(1.23) запишутся в виде:

$$\varphi=\frac{c_0^2}{\omega}\left(M_a \exp\left(-i\omega t+i\left(\mathbf{k}_A\mathbf{r}\right)\right) + \frac{\beta T_0}{\gamma}\sqrt{\frac{\omega\chi}{c_0^2}}\, M_s \exp\left(-i\omega t+i\left(\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}\right)\right)\right) \quad (1.26)$$

$$s'=c_v\left(\frac{\beta\,\chi}{c_v}\omega\, M_a \exp\left(-i\omega t+i\left(\mathbf{k}_A\mathbf{r}\right)\right) + M_s \exp\left(-i\omega t+i\left(\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}\right)\right)\right). \quad (1.27)$$

В соответствии с данными, приведенными в таблице 1.1, видно, что относительный вклад тепловой компоненты в акустическую волну $\left(\beta T_0\sqrt{\omega\chi/c_0^2}\,/\gamma\right)$ и, наоборот, относительный вклад акустического возмущения в энтропийное $\left(\beta\,\chi\,\omega/c_v\right)$ малы во всем ультразвуковом диапазоне частот вплоть до гигагерц (см. таблицу 1.1). Фактически эти величины являются дополнительными параметрами малости (наряду с $M_a$ и $M_s$ в данной задаче и показывает слабость связи тепловой и акустической волны в линейном приближении. С физической точки зрения это связано с сильным различием волновых векторов рассматриваемых волн. Учет нелинейных эффектов, однако, в принципе может привести к появлению сильно взаимодействующих резонансных троек (так как тепловые волны сильно диспергируют). Но для данного закона дисспесии они невозможны.

Как уже указывалось выше, в линейном акустическом приближении относительное возмущение энтропии $M_s$, обусловленное акустической волной, много меньше акустического числа Маха (хотя оно и линейно по акустическому возмущению). Поэтому может быть заметным изменение энтропии, связанное с акустическими нелинейными эффектами. Так в идеальной среде возмущение энтропии кубично по числу Маха [9]:

$$M'_s = \gamma\left(\gamma^2 - 1\right) M_a^3 \,/\, 12 \,. \qquad (1.28)$$

Соответственно, при

$$\frac{\gamma\left(\gamma^2 - 1\right)}{12} M_a^2 > \frac{\beta\chi}{c_v}\omega; \qquad M_a > \left(\frac{\omega\chi}{c_0^2 \beta T_0} \frac{12}{\gamma + 1}\right)^{1/2} \qquad (1.29)$$

нелинейная добавка к энтропии (1.28) превысит линейную в выражении (1.26). Заметим, что в силу кубичности по $M_a$ в (1.28) это возмущение будет иметь ту же пространственно-временную зависимость, что и (1.27). Благодаря малому сомножителю $\left(\beta T_0\right)$, условие (1.29) в ультразвуковом диапазоне частот может быть выполнено только для чрезвычайно мощных волн с $M_a > 10^{-2}$. Поэтому в рамках акустических приближений можно считать линейную часть энтропии, появляющуюся за счет термоупругой связи, превышающего нелинейную.

Другая нелинейная добавка к энтропии - квадратичная - связана с вязкостью среды и не имеет структуры (1.26). В соответствии с (1.3) ее величина может быть оценена как

$$M''_s = \frac{\left(\xi + \frac{4}{3}\eta\right)\omega}{\rho_0 T_0 c_v} M_a^2 \,.$$

Эта величина имеет вид не волны, а постоянного распределения по объему, занятому акустической волной. Однако ее относительная величина может быть сравнима с (1.27). Так при

$$M_a > \beta T_0 \frac{\rho_0 \chi}{\xi + \frac{4}{3}\eta}$$

среднее изменение энтропии может превышать ее величину в волне. Это возможно даже при умеренных числах Маха $M_a \sim 10^{-4} \div 10^{-3}$ для сильновязких жидкостей с высоким значением числа Прандтля $\left(\xi + \frac{4}{3}\eta\right) \Big/ \rho_0 \chi$ [6].

Таким образом, для свободно распространяющихся акустических и тепловых волн термоупругая связь приводит к появлению возмущения энтропии, пропорционального амплитуде акустического возмущения, причем это возмущение энтропии в широком диапазоне частот и амплитуд превышает вклад в энтропию за счет нелинейных процессов. В идеальной среде возмущение энтропии кубично по числу Маха, в вязкой (но не теплопроводящей) - квадратично, а в теплопроводящей - линейно. Более того, слабость взаимодействия собственных акустических и тепловых волн приводит к возможности рассматривать несвязанную задачу термоупругости в широком диапазоне частот $\omega \ll \omega_\chi$.