§ 1.3. ПЕРЕХОД СВЯЗАННЫХ АКУСТИЧЕСКИХ И ТЕПЛОВЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА СРЕД.

При распространении в однородной среде связь акустической и тепловой волн слабая. Однако положение может радикально измениться при наличии акустической и тепловой неоднородности. Рассмотрим поэтому переход квазиакустической волны (квазитепловая носит диффузионный характер и не уходит на заметное расстояние от источника) через границу $z=0$ раздела сред (условно обозначаемых через "1" и "2"). Тогда в линейном приближении, вводя потенциалы скорости

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi + rot\,\psi, \tag{1.30}$$

можно переписать систему (1.7)-(1.9) в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - c_1^2 \Delta\varphi_1 - \frac{\left(\xi_1 + \frac{4}{3}\eta_1\right)}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial t} \Delta\varphi_1 + \frac{c_1^2 \beta_1 T_0}{c_{p1}} \frac{\partial s_1}{\partial t} = 0, \tag{1.31}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial s_1}{\partial t} - \gamma_1 \chi_1 \Delta s_1\right) + c_1^2 \beta_1 \chi_1 \Delta^2 \varphi_1 = 0, \tag{1.32}$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{\eta_1}{\rho_1} \Delta\psi_1, \qquad div\,\psi_1 = 0 \tag{1.33}$$

и аналогичные для среды "2" (с точностью до перестановки индексов).

На границе сред наряду с условиями равенства колебателных скоростей

$$\mathbf{v}_1\big|_{z=0} = \mathbf{v}_2\big|_{z=0} \tag{1.34}$$

и компонент тензоров напряжений [6]:

$$\eta_1\left(\frac{\partial v_{1x}}{\partial z}+\frac{\partial v_{1z}}{\partial x}\right)\Big|_{z=0} = \eta_2\left(\frac{\partial v_{2x}}{\partial z}+\frac{\partial v_{2z}}{\partial x}\right)\Big|_{z=0} \quad ; \tag{1.35}$$

$$\eta_1\left(\frac{\partial v_{1y}}{\partial z}+\frac{\partial v_{1z}}{\partial y}\right)\Big|_{z=0} = \eta_2\left(\frac{\partial v_{2y}}{\partial z}+\frac{\partial v_{2z}}{\partial y}\right)\Big|_{z=0} \quad ; \tag{1.36}$$

$$\begin{gathered}\left[p_1-\eta_1\left(2\,\frac{\partial v_{1z}}{\partial z}-\frac{2}{3}\,div\,\mathbf{v}_1\right)-\xi_1\,div\,\mathbf{v}_1\right]\Big|_{z=0}= \\ =\left[p_2-\eta_2\left(2\,\frac{\partial v_{2z}}{\partial z}-\frac{2}{3}\,div\,\mathbf{v}_2\right)-\xi_2\,div\,\mathbf{v}_2\right]\Big|_{z=0}\end{gathered} \tag{1.37}$$

должны также выполняться условия равенства температур

$$T_1\big|_{z=0}=T_2\big|_{z=0}\,; \tag{1.38}$$

$$\kappa_1\,\frac{\partial T_1}{\partial z}\Big|_{z=0}=\kappa_2\,\frac{\partial T_2}{\partial z}\Big|_{z=0}\,. \tag{1.39}$$

Подстановкой представления (1.30) и уравнений состояния (1.5), (1.6) систему можно свести к замкнутому виду. Однако в граничных условиях оказываются связанными не все компоненты ψ и поля φ и s. Ее можно разделить на две независимые системы, введя следующие новые переменные:

$$A=\left(rot\,\psi\right)_z=\frac{\partial\psi_y}{\partial x}-\frac{\partial\psi_x}{\partial y}\,, \tag{1.40}$$

$$B=\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\partial\psi_y}{\partial y}=-\frac{\partial\psi_z}{\partial z}\,. \tag{1.41}$$

Тогда в граничных условиях оказываются связанными отдельно величины B и ψ_z, а также φ, s и A. Поскольку уравнения для сдвиговых компонент (1.30) однородны и в силу их высокого затухания до границы раздела сред они не доходят. Соответственно можно считать

$$\psi_z=\frac{\partial\psi_z}{\partial z}=0\,.$$

Таким образом, на границе продольная волна оказывается связаной лишь с поляризованной нормально к границе компонентой сдвиговой волны.

В обозначениях (1.40) граничные условия (1.34)-(1.37) сводятся к виду

$$\left.\left(\Delta_{\perp}\varphi_1 - \frac{\partial A_1}{\partial z}\right)\right|_{z=0} = \left.\left(\Delta_{\perp}\varphi_2 - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\right|_{z=0}, \tag{1.42}$$

$$\left.\left(\frac{\partial}{\partial z}\Delta_{\perp}\varphi_1 + \Delta_{\perp}A_1 - \frac{\rho_1}{2\eta_1}\frac{\partial A_1}{\partial t}\right)\right|_{z=0} = \left.\left(\frac{\partial}{\partial z}\Delta_{\perp}\varphi_2 + \Delta_{\perp}A_2 - \frac{\rho_2}{2\eta_2}\frac{\partial A_2}{\partial t}\right)\right|_{z=0}, \tag{1.43}$$

$$\left.\left(\rho_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} - 2\eta_1\Delta_{\perp}\varphi_1 + 2\eta_1\frac{\partial A_1}{\partial z}\right)\right|_{z=0} = \left.\left(\rho_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} - 2\eta_2\Delta_{\perp}\varphi_2 + 2\eta_2\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\right|_{z=0} \tag{1.44}$$

$$\left.\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + A_1\right)\right|_{z=0} = \left.\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + A_2\right)\right|_{z=0}. \tag{1.45}$$

Как видно, граничные условия для акустической компоненты не содержат тепловых величин. Связь акустических и тепловых волн проявляется в условиях (1.38)-(1.39):

$$\left.\left(-\frac{c_1^2\beta_1 T_0}{c_{p1}}\Delta\varphi_1 + \frac{T_0}{c_{v1}}\frac{\partial s_1}{\partial t}\right)\right|_{z=0} = \left.\left(-\frac{c_2^2\beta_2 T_0}{c_{p2}}\Delta\varphi_2 + \frac{T_0}{c_{v2}}\frac{\partial s_2}{\partial t}\right)\right|_{z=0}, \tag{1.46}$$

$$\begin{aligned} &\kappa_1\left.\left(-\frac{c_1^2\beta_1 T_0}{c_{p1}}\frac{\partial}{\partial z}\Delta\varphi_1 + \frac{T_0}{c_{v1}}\frac{\partial^2 s_1}{\partial t\,\partial z}\right)\right|_{z=0} = \\ &= \kappa_2\left.\left(-\frac{c_2^2\beta_2 T_0}{c_{p2}}\frac{\partial}{\partial z}\Delta\varphi_2 + \frac{T_0}{c_{21}}\frac{\partial^2 s_2}{\partial t\,\partial z}\right)\right|_{z=0} \end{aligned} \tag{1.47}$$

(здесь производные $\partial^2\varphi_{1,2}\big/\partial z^2$ должны быть выражены из уравнения (1.31)). Естественно, что с тепловой волной связана только продольная акустическая волна. Кроме того, поскольку тепловая компонента возмущений (1.26)-(1.27) быстро затухает с удалением от источника, можно рассматривать лишь акустическую компоненту в падающей на границу волне.

Граничные условия (1.42)-(1.47) могут быть преобразованы с учетом уравнений (1.31)-(1.33) и слабости связи тепловых и акустических волн. Так для Фурье-образов

$$\tilde{A}_{1,2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \int d\mathbf{r}_\perp \, e^{i\omega t - i(\mathbf{k}_\perp \mathbf{r}_\perp)} A_{1,2}(t, \mathbf{r}_\perp, z) \tag{1.48}$$

решение уравнений (1.33) будет иметь вид:

$$\tilde{A}_1 = A_{10} \exp\left(+i\sqrt{i\omega\rho_1 / \eta_1 - k_\perp^2} \; z \right), \tag{1.49}$$

$$\tilde{A}_2 = A_{20} \exp\left(-i\sqrt{i\omega\rho_2 / \eta_2 - k_\perp^2} \; z \right). \tag{1.50}$$

Подставляя (1.49), (1.50) в (1.41)-(1.45) и исключая A_{10}, A_{20} из уравнений, получим:

$$\tilde{\varphi}_2\Big|_0 \left[i\omega\rho_2 - k_\perp^2 \left(\eta_2 - \frac{\sigma_1\eta_1 + \sigma_2\eta_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \right] - \tilde{\varphi}_1\Big|_0 \left[i\omega\rho_1 - k_\perp^2 \left(\eta_1 - \frac{\sigma_1\eta_1 + \sigma_2\eta_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \right] = \tag{1.51}$$

$$= i\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}(\eta_2 - \eta_1)\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}_2}{\partial z}\Big|_0 - \frac{\partial\tilde{\varphi}_1}{\partial z}\Big|_0 \right),$$

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_2}{\partial z}\Big|_0 \left[1 + k_\perp^2 \frac{\eta_2(\sigma_1 + \sigma_2)}{\sigma_1\sigma_2(\sigma_2\eta_2 + \sigma_1\eta_1)} \right] - \frac{\partial\tilde{\varphi}_1}{\partial z}\Big|_0 \left[1 + k_\perp^2 \frac{\eta_1(\sigma_1 + \sigma_2)}{\sigma_1\sigma_2(\sigma_2\eta_2 + \sigma_1\eta_1)} \right] = \tag{1.52}$$

$$= i k_\perp^2 \frac{\eta_2\sigma_2^2 - \eta_1\sigma_1^2}{\sigma_1\sigma_2(\sigma_2\eta_2 + \sigma_1\eta_1)}\left(\tilde{\varphi}_2\Big|_0 - \tilde{\varphi}_2\Big|_0 \right),$$

где

$$\sigma_1 = \sqrt{i\omega\rho_1 / \eta_1 - k_\perp^2}, \qquad \sigma_2 = \sqrt{i\omega\rho_2 / \eta_{12} - k_\perp^2}.$$

В (1.51)-(1.52) в левых частях выражений выделены главные слагаемые.

При отражении акустической волны от границы сред $|\mathbf{k}_\perp| = k_{a1}\sin\theta$, где θ - угол падения. Так как в рамках приближения уравнений Навье-Стокса диффузионные процессы должны считаться медленными $(\omega \ll \omega_v)$, то достаточно положить $|\mathbf{k}_\perp|^2 \ll \omega\rho/\eta$ и

$$\sigma_{1,2} = \sqrt{i\omega\rho_{1,2}/\eta_{1,2}}\ .$$

Тогда условия (1.51)-(1.52) существенно упрощаются:

$$\rho_2 \tilde{\varphi}_2\big|_0 \left[1 - \frac{k_\perp^2}{(i\omega\rho_2/\eta_2)} \frac{(1-\eta_1/\eta_2)}{1+R_v} R_v\right] - \rho_1 \tilde{\varphi}_1\big|_0 \left[1 - \frac{k_\perp^2}{(i\omega\rho_1/\eta_1)} \frac{(1-\eta_2/\eta_1)}{1+R_v}\right] =$$

$$= \rho_1 \frac{\eta_2/\eta_1 - 1}{1+R_v} \left(-i\frac{\omega\rho_1}{\eta_1}\right)^{-1/2} \left(\frac{\partial\tilde{\varphi}_2}{\partial z}\bigg|_0 - \frac{\partial\tilde{\varphi}_1}{\partial z}\bigg|_0\right), \qquad (1.53)$$

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}_2}{\partial z}\bigg|_0 \left[1 + \frac{k_\perp^2}{(i\omega\rho_2/\eta_2)} \frac{1+R_v}{R_v(1+\eta_1 R_v/\eta_2)}\right] - \frac{\partial\tilde{\varphi}_1}{\partial z}\bigg|_0 \left[1 + \frac{k_\perp^2}{(i\omega\rho_1/\eta_1)} \frac{R_v(1+R_v)}{R_v+\eta_2/\eta_1}\right] =$$

$$= \frac{k_\perp^2}{(\omega\rho_2/\eta_2)} \frac{1-\rho_1/\rho_2}{1+R_v\eta_1/\eta_2} \left(\frac{i\omega\rho_1}{\eta_1}\right)^{-1/2} \left(\tilde{\varphi}_2\big|_0 - \tilde{\varphi}_1\big|_0\right), \qquad (1.54)$$

где $R_v = (\rho_1\eta_2/\rho_2\eta_1)^{1/2}$.

В приближении адиабатичности, граничные условия (1.46)-(1.47) также могут быть упрощены и сведены к виду

$$\frac{1}{c_{p1}}\left(\tilde{s}_1\big|_0 + i\omega\beta_1\tilde{\varphi}_1\big|_0\right) = \frac{1}{c_{p2}}\left(\tilde{s}_2\big|_0 + i\omega\beta_2\tilde{\varphi}_2\big|_0\right), \qquad (1.55)$$

$$\frac{\kappa_1}{c_{p1}}\left(\frac{\partial\tilde{s}_1}{\partial z}\bigg|_0 + i\omega\beta_1\frac{\partial\tilde{\varphi}_1}{\partial z}\bigg|_0\right) = \frac{\kappa_2}{c_{p2}}\left(\frac{\partial\tilde{s}_2}{\partial z}\bigg|_0 + i\omega\beta_2\frac{\partial\tilde{\varphi}_2}{\partial z}\bigg|_0\right). \qquad (1.56)$$

В отличие от (1.46)-(1.47), в них входят теплоемкости c_p, а не c_v. Однако для конденсированных сред (за исключением органических жидкостей) этим отличием обычно можно пренебречь.

Как нетрудно видеть, граничные условия (1.53)-(1.56), полученные с учетом взаимодействия продольных, сдвиговых и тепловых волн, отличаются от соответствующих условий в отсутствие взаимодействия лишь на поправки порядка

$\left(\omega/\omega_\chi\right)^{1/2}$, $\left(\omega/\omega_\nu\right)^{1/2} \ll 1$. Поэтому изменения коэффициентов отражения волн за счет их взаимодействия также малы и, как правило, могут не учитываться. В приближении $\omega \ll \omega_\nu$ можно пренебречь возбуждением сдвиговых волн в жидкости. Поэтому в практически важном случае $\omega \ll \omega_\nu$ можно ограничиться несвязанной задачей термоупругости и соответствующими ей граничными условиями

$$\rho_2 \tilde{\varphi}_2\big|_0 = \rho_1 \tilde{\varphi}_1\big|_0 , \tag{1.57}$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{\varphi}_2}{\partial z}\right|_0 = \left.\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial z}\right|_0 , \tag{1.58}$$

$$\left.\frac{1}{c_{p1}} \tilde{s}_1\right|_0 = \left.\frac{1}{c_{p2}} \tilde{s}_2\right|_0 , \tag{1.59}$$

$$\left.\frac{\kappa_1}{c_{p1}} \frac{\partial \tilde{s}_1}{\partial z}\right|_0 = \left.\frac{\kappa_2}{c_{p2}} \frac{\partial \tilde{s}_2}{\partial z}\right|_0 , \tag{1.60}$$

которые будут основой дальнейшего анализа.