## § 2.4. ТЕРМООПТИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ.

Уравнения, описывающие возбуждение акустических волн в изотропном твердом теле были приведены выше - (2.42), (2.43), так же, как и граничные условия - (2.44)-(2.47). При ограниченных в поперечном направлении распределений источников тепла возбуждаются не только продольные, но и поперечные акустические волны.

Воспользуемся спектральным методом: уравнения для спектральных компонент

$$\tilde{\varphi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \iint e^{i\omega t - i\left(\mathbf{k}_{\perp}\mathbf{r}_{\perp}\right)}\, \varphi\left(t, \mathbf{r}, z\right) dt\, d\mathbf{r}_{\perp}$$

примут вид

$$\frac{d^2\tilde{\varphi}_1}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_{L1}^2} - \mathbf{k}_{\perp}^2\right)\tilde{\varphi}_1 = -i\omega\frac{\beta_1^*}{c_{p1}} T_0\, \tilde{s}_1\,, \tag{2.59}$$

$$\frac{d^2\tilde{\varphi}_2}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_{L2}^2} - \mathbf{k}_{\perp}^2\right)\tilde{\varphi}_2 = -i\omega\frac{\beta_2^*}{c_{p2}} T_0\, \tilde{s}_2\,, \tag{2.60}$$

$$\frac{d^2\tilde{A}_1}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_{T1}^2} - \mathbf{k}_{\perp}^2\right)\tilde{A}_1 = 0\,, \tag{2.61}$$

$$\frac{d^2\tilde{A}_2}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_{T2}^2} - \mathbf{k}_{\perp}^2\right)\tilde{A}_2 = 0\,, \tag{2.62}$$

Для нахождения спектральных плотностей энтропии необходимо решить уравнение (2.2) с граничными условиями (1.59)-(1.60). Тогда

$$\tilde{s}_1 = s_{10}\exp\left(\sqrt{-i\frac{\omega}{\chi_1} + \mathbf{k}_{\perp}^2}\; z\right), \tag{2.63}$$

где $\mathrm{Re}\left(\sqrt{-i\dfrac{\omega}{\chi_1}+\mathbf{k}_\perp^2}\right)>0$, а граничные условия приводятся к

$$\left.\frac{\partial \tilde{s}_2}{\partial z}\right|_0 = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}\sqrt{-i\frac{\omega}{\chi_1}+\mathbf{k}_\perp^2}\,\tilde{s}_2\Big|_0 . \tag{2.64}$$

Тогда, используя преобразование Лапласа (2.26), решение можно записать в виде:

$$\hat{s}_2 = -\left[\rho_2 T_0\left(p^2+i\frac{\omega}{\chi_2}-\mathbf{k}_\perp^2\right)\right]^{-1}\left[\hat{Q}(\omega,\mathbf{k}_\perp,p)-\hat{Q}\left(\omega,\mathbf{k}_\perp,\sqrt{-i\frac{\omega}{\chi_2}+\mathbf{k}_\perp^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{p\kappa_2+\kappa_1\sqrt{-i\dfrac{\omega}{\chi_1}+\mathbf{k}_\perp^2}}{\kappa_2\sqrt{-i\dfrac{\omega}{\chi_2}+\mathbf{k}_\perp^2}+\kappa_1\sqrt{-i\dfrac{\omega}{\chi_1}+\mathbf{k}_\perp^2}}\right],$$

(2.65)

$$\hat{s}_1 = \frac{c_{p1}\chi_2}{T_0}\frac{\hat{Q}\left(\omega,\mathbf{k}_\perp,\sqrt{-i\dfrac{\omega}{\chi_2}+\mathbf{k}_\perp^2}\right)}{\kappa_2\sqrt{-i\dfrac{\omega}{\chi_2}+\mathbf{k}_\perp^2}+\kappa_1\sqrt{-i\dfrac{\omega}{\chi_1}+\mathbf{k}_\perp^2}}\exp\left(\sqrt{-i\frac{\omega}{\chi_1}+\mathbf{k}_\perp^2}\,z\right).$$

Таким образом, теплообмен в случае трехмерных волн определяется не только отношением тепловых активностей $R_T$, но и зависит от поперечного волнового вектора $\mathbf{k}_\perp$. В прозрачной среде тепловая волна - свободная и ее амплитуда определяется лаплас-компонентой распределения источников тепла $\hat{Q}$.

Полученные выражения (2.65) необходимо подставить в уравнения (2.59), (2.60). Тогда с учетом условий излучения получим

$$\tilde{\varphi}_1 = \varphi_{10}\exp\left(-i\sqrt{\frac{\omega^2}{c_{L1}^2}-\mathbf{k}_\perp^2}\,z\right)+\frac{T_0\beta_1^*\chi_1}{c_{p1}}\frac{s_{10}}{1+i\dfrac{\omega\chi_1}{c_{L1}^2}}\exp\left(-i\sqrt{\frac{\omega}{\chi_1}+\mathbf{k}_\perp^2}\,z\right).$$

Но в приближении несвязанной задачи термоупругости $\omega\chi_1/c_{L1}^2 \ll 1$ и, подставляя выражение для $s_{10}$, получим

$$\tilde{\varphi}_1 = \varphi_{10} \exp\left( -i \sqrt{\frac{\omega^2}{c_{L1}^2} - \mathbf{k}_\perp^2}\, z \right) + \frac{\beta_1^* \chi_1 \chi_2\, \hat{Q}\left( \omega, \mathbf{k}_\perp, \sqrt{-i\frac{\omega}{\chi_2} + \mathbf{k}_\perp^2} \right)}{\kappa_2 \sqrt{-i\frac{\omega}{\chi_2} + \mathbf{k}_\perp^2} + \kappa_1 \sqrt{-i\frac{\omega}{\chi_1} + \mathbf{k}_\perp^2}} \times \tag{2.66}$$

$$\times \exp\left( \sqrt{-i\frac{\omega}{\chi_1} + \mathbf{k}_\perp^2}\, z \right).$$

Далее, в силу однородности уравнений (2.61), (2.62) их решения будут иметь вид:

$$\tilde{A}_1 = A_{10} \exp\left( -i \sqrt{\frac{\omega^2}{c_{T1}^2} - \mathbf{k}_\perp^2}\, z \right), \tag{2.67}$$

$$\tilde{A}_2 = A_{20} \exp\left( +i \sqrt{\frac{\omega^2}{c_{T2}^2} - \mathbf{k}_\perp^2}\, z \right). \tag{2.68}$$

Для решения уравнения (2.60) воспользуемся преобразованием Лапласа:

$$\left( \frac{\omega^2}{c_{L2}^2} - \mathbf{k}_\perp^2 + p^2 \right) \hat{\varphi}_2 = -i\omega \frac{\beta_2^*}{c_{p2}} T_0 \hat{s}_2 - \left.\frac{d\tilde{\varphi}_2}{dz}\right|_0 - p \left.\tilde{\varphi}_2\right|_0 .$$

В силу условия излучения $\hat{\varphi}_2$ не должно содержать особых точек в нижней полуплоскости параметра $p$. Отсюда следует связь

$$\left.\frac{d\tilde{\varphi}_2}{dz}\right|_0 - i \sqrt{\frac{\omega^2}{c_{L2}^2} - \mathbf{k}_\perp^2}\, \left.\tilde{\varphi}_2\right|_0 = -i\omega \frac{\beta_2^*}{c_{p2}} T_0 \hat{s}_2 \left( \omega, \mathbf{k}_\perp, -i \sqrt{\frac{\omega^2}{c_{L2}^2} - \mathbf{k}_\perp^2} \right). \tag{2.69}$$

Подставляя (2.66)-(2.68) в граничные условия (2.44)-(2.47) и исключая все величины, кроме $\left.\tilde{\varphi}_2\right|_0$ и $\left.\frac{d\tilde{\varphi}_2}{dz}\right|_0$, можно найти второе соотношение между ними. Однако ввиду громоздкости здесь оно не приводится. Его сложность связана с множественностью типов волн, которые могут возбуждаться в рассматриваемом случае - продольные, сдвиговые, типа Стоунли и т.п.. Им будут соответствовать полюса в решении $\hat{\varphi}_2$.

В силу вышесказанного рассмотрим только возбуждение рэлеевских волн тепловыми. Для этого в граничных условиях необходимо положить $A_{10}=0, \mu_1=0$. Поскольку, как было показано в §2.3 тепловое расширение газовой среды влияет только на низких частотах, то при описании возбуждения рэлеевских волн можно положить $\tilde{\varphi}_1=0$ и $\beta_1^*=0$. Тогда решение для нормальной компоненты колебательной скорости поверхности $\tilde{\omega}$ может быть записано в виде [8]:

$$\tilde{\omega}=\frac{\beta_2^*}{\rho_2 c_{p2}} F \frac{i\omega^2}{c_R^2} \tilde{H}\left(\frac{\omega}{c_R},\xi\right)\hat{g}\left(|\omega|\left(c_R^{-2}-c_{L2}^{-2}\right)^{1/2}\right)\tilde{I}_0(\omega), \qquad (2.70)$$

где

$$F=\left(\frac{c_R}{2c_{T2}}\right)^2\left\{\left[2-\left(\frac{c_R}{c_{T2}}\right)^2\right]\left[2+\left(1-\frac{c_R^2}{c_{T2}^2}\right)^{-1}+\left(1-\frac{c_R^2}{c_{L2}^2}\right)^{-1}\right]-8\right\}^{-1}$$

определяется только упругими постоянными среды, а $\xi$ – направление распространения волны.

Таким образом, спектр возбуждаемой рэлеевской волны определяется фурье-спектром поперечного распределения источников тепла и лаплас-образом их распределения по глубине. Во всем диапазоне частот $\omega \ll c_{L2}^2/\chi_2$ теплопроводность среды не сказывается на эффективности возбуждения рэлеевских волн.

Рассмотрим в качестве примера одномерное распределение источников в поперечном направлении

$$H(\mathbf{r}_\perp)=H(x).$$

Тогда вне области их действия существуют лишь чисто бегущие волны, и для волны, бегущей в сторону увеличения $x$, имеем

$$\omega_+\left(\tau=t-x/c_R\right)=\frac{\beta_2^*}{\pi\rho_2 c_{p2}}F\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-i\frac{\omega}{c_R}\right)\exp\left(-i\omega\tau\right)\widetilde{H}\left(\omega/c_R\right)\hat{g}\left(\left|\omega\right|\left(c_R^{-2}-c_{L2}^{-2}\right)^{1/2}\right)\widetilde{I}_0\left(\omega\right)d\omega. \tag{2.71}$$

Как видно из (2.71) решение в данном случае также представимо в виде:

$$\widetilde{\omega}_+=K\left(\omega\right)\widetilde{I}_0\left(\omega\right)$$

и выражение для $K\left(\omega\right)$ легко устанавливается их сравнением.

Из решения (2.71) следует, что для эффективного возбуждения рэлеевской волны на частоте $\omega$ необходимо выполнение трех условий: немалость (относительная) спектральной компоненты модуляции интенсивности источников, не должна быть малой спектральная составляющая поперечного распределения его источников (ширина $a\le\lambda_R$ длины волны Рэлея), наконец, глубина проникновения греющего излучения $\alpha^{-1}\le\lambda_R$. Необходимо отметить, что при выполнении этих условий эффективность возбуждения растет с частотой $\sim\omega$. При коротком импульсе возбуждения $\left(\widetilde{I}_0\left(\omega\right)=const\right)$ и малой глубине тепловыделения импульс рэлеевской волны пропорционален производной распределения источников тепла $H'\left(x\right)$.

Различие передаточных функций теплового возбуждения ПАВ (2.71) и объемных волн (см., например, (2.40)) состоит в том, что эффективность возбуждения объемных волн определяется фурье-спектром распределения источников по глубине, а рэлеевских - его лапласовским спектром. Поэтому источники, расположенные на глубинах $z>\lambda_R$ не влияют на возбуждение рэлеевской волны с длиной $\lambda_R$ (в отличие от объемных волн).

В более общем случае $H(\mathbf{r}_\perp)$ вне области тепловыделения существует бегущая волна, которую в дальнем поле можно представить в виде

$$\omega\left(\tau = t - \mathbf{r}_\perp / c_R, \mathbf{r}_\perp, \delta\right) = -\frac{\beta_2^*}{2\pi\rho_2 c_{p2}} F \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{c_R^2} \left(\frac{c_R}{\pi \mathbf{r}_\perp |\omega|}\right)^{1/2} \exp\left(-i\omega\tau - i\pi/4\right) \tilde{H}\left(\omega / c_R, \delta\right) \hat{g}\left(|\omega| \left(c_R^{-2} - c_{L2}^{-2}\right)^{1/2}\right) \tilde{I}_0(\omega)\, d\omega.$$

Это решение представляет диаграмму направленности излучения ПАВ тепловыми волнами, которая определяется распределением источников тепла по сечению $\tilde{H}\left(\omega / c_R, \delta\right)$. Амплитуда же волны, как это и должно быть для расходящейся цилиндрической волны, пропорциональна $r^{-1/2}$.

Резюмируя, можно сказать, что спектральный метод дает мощный аппарат анализа возбуждения акустических волн тепловыми. Вне области тепловыделения существуют чисто бегущие акустические волны, спектральная плотность которых определяется пространственными спектрами распределения источников тепла и содержит в качестве сомножителя спектр модуляции интенсивности источников (если они неподвижны относительно среды).