§ 3.3. НЕЛИНЕЙНАЯ, ДИССИПАТИВНАЯ И ДИФРАКЦИОННАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВИДЕОИМПУЛЬСОВ.

Акустическая нелинейность, как было показано в §3.2, в процессе теплового возбуждения звука практически проявляется слабо. Однако в процессе распространения возбуждаемых акустических видеоимпульсов ее влияние может быть существенным (что собственно и видно из сравнения профилей волны при $\alpha z = 5$ и $\alpha z = 10$ на рис.3.5 и 3.6). Фактически это означает, что характерная длина проявления нелинейных эффектов L_{NL} мала по сравнению с размерами области возбуждения: $\alpha L_{NL} >> 1$. Ранее было показано (см. §1.2), что в зоне возбуждения можно пренебречь также диссипативными эффектами: $\alpha L_{DS} >> 1$. В то же время соотношение масштабов L_{NL} и L_{DS} может быть произвольным.

Существенное влияние на тепловое возбуждение звука могут оказывать дифракционные явления (см. §2.2). Очевидно, однако, что при сильной дифракции $\left(\alpha a \le 1\right)$ другие накапливающиеся эффекты (нелинейность, диссипация) будут проявляться только в дальней волновой зоне. В силу вышесказанного целесообразно рассматривать только случай $\alpha L_{DF} >> 1$.

Указанные соотношения

$$\left(\alpha L_{DS}, \alpha L_{NL}, \alpha L_{DF}\right) >> 1$$

позволяют анализировать тепловое возбуждение звука поэтапно. На первом этапе рассматривается задача о тепловом возбуждении звука в отсутствие диссипативных, дифракционных и нелинейных эффектов. Полученные выражения для профиля бегущей волны (см. §§2.1,2.3) используются в качестве граничного условия для задачи эволюции профиля волны в нелинейной, диссипативной среде при ограниченных поперечных размерах пучка [18] и в отсутствие тепловых источников.

Уравнение, описывающее такую эволюцию волны, - уравнение Хохлова-Заболотской-Кузнецова [24] - может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{b}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} \right) = \frac{c_0}{2} \Delta_\perp v . \qquad (3.14)$$

Здесь v - $z-$компонента колебательной скорости. В общем случае решение (3.14) возможно только численным образом.

Аналитические результаты могут быть получены в случаях сильного различия масштабов проявления отдельных эффектов. Так, если $L_{DS} \ll L_{NL}, L_{DF}$, то (3.14) сводится к параболическому эволюционному уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{b}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = 0 ,$$

спектр решения которого представим в виде

$$\tilde{v}(\omega, z) = \tilde{v}(\omega, z=0) \exp\left(-b\omega^2 z \big/ 2\rho_0 c_0^3 \right).$$

В качестве граничного условия $\tilde{v}(\omega, z=0)$ используется решение задачи возбуждения (2.53) или (2.54). Соответственно временное представление будет иметь вид:

$$v(z,\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\omega) \tilde{I}_0(\omega) \exp\left(-i\omega\tau - b\omega^2 z \big/ 2\rho_0 c_0^3 \right). \qquad (3.15)$$

Решение (3.15) показывает, что в этом случае спектр возбуждаемой волны домножается на диссипативный фактор, который приводит к прогрессирующему по мере распространения “завалу” высокочастотных компонент сигнала.

На больших расстояниях $z > 2\rho_0 c_0^3 b^{-1}\left(\min\left(\tau_L, \alpha c_0\right)\right)^{-2}$ спектр звукового сигнала ограничивается диссипативным фактором и профиль сигнала имеет универсальный вид:

$$v\left(N=0\right) = \frac{\beta E_0}{\rho_0 c_p}\sqrt{\frac{\rho_0 c_0^3}{2\pi b z}}\exp\left(-\frac{\rho_0 c_0^3}{2bz}\tau^2\right)$$

- гауссовый для жесткой границы и

$$v\left(N=\infty\right) = \frac{\beta E_0}{\rho_0 c_p}\sqrt{\frac{\rho_0 c_0^3}{2\pi b z}}\left(-\frac{\rho_0 c_0^3}{\alpha b z}\tau\right)\exp\left(-\frac{\rho_0 c_0^3}{2bz}\tau^2\right)$$

его производной - для свободной границы. Естественно, что в случае импедансной границы профиль будет иметь вид их взвешенной суммы. Возбуждаемый при жесткой границе сигнал убывает в диссипативной среде пропорционально $z^{-1/2}$, при свободной - пропорционально z^{-1}. На расстояниях $z > 2\rho_0 c_0^3 / \left(\alpha b c_0\right)^2$ профиль волны имеет универсальную форму и все детали распределения источников тепла стираются.

Если $L_{DF} \ll L_{NL}, L_{DS}$, то (3.14) сводится к параболическому уравнению теории дифракции:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{c_0}{2}\Delta_\perp v .$$

Рассмотрим для определенности гауссово распределение источников в поперечном направлении

$$I\left(t, \mathbf{r}_\perp\right) = I_0\left(t\right)\exp\left(-\frac{\mathbf{r}_\perp^2}{a^2}\right),$$

здесь a – радиус пучка. Тогда спектр возбуждаемого сигнала может быть записан в виде

$$\tilde{v}(\omega, z, \mathbf{r}_\perp) = K(\omega)\,\tilde{I}_0(\omega)\,\frac{1}{1+iz/L_{DF}}\exp\left(-\frac{\mathbf{r}_\perp^2}{a^2\left(1+iz/L_{DF}\right)}\right),$$

где $L_{DF} = \omega a^2 / 2c_0$ – длина дифракции волны частоты ω. Поперечное распределение каждой из гармоник остается гауссовым.

На оси пучка $\mathbf{r}_\perp = 0$ спектр (3.16) имеет вид произведения исходного спектра на дифракционный фактор $\left(1+iz/L_{DF}\right)^{-1}$ (в полной аналогии с (3.15)). На рис. 3.8, 3.9 представлено изменение профиля волны при переходе из ближней волновой зоны в дальнюю при жесткой и свободной границах соответственно.

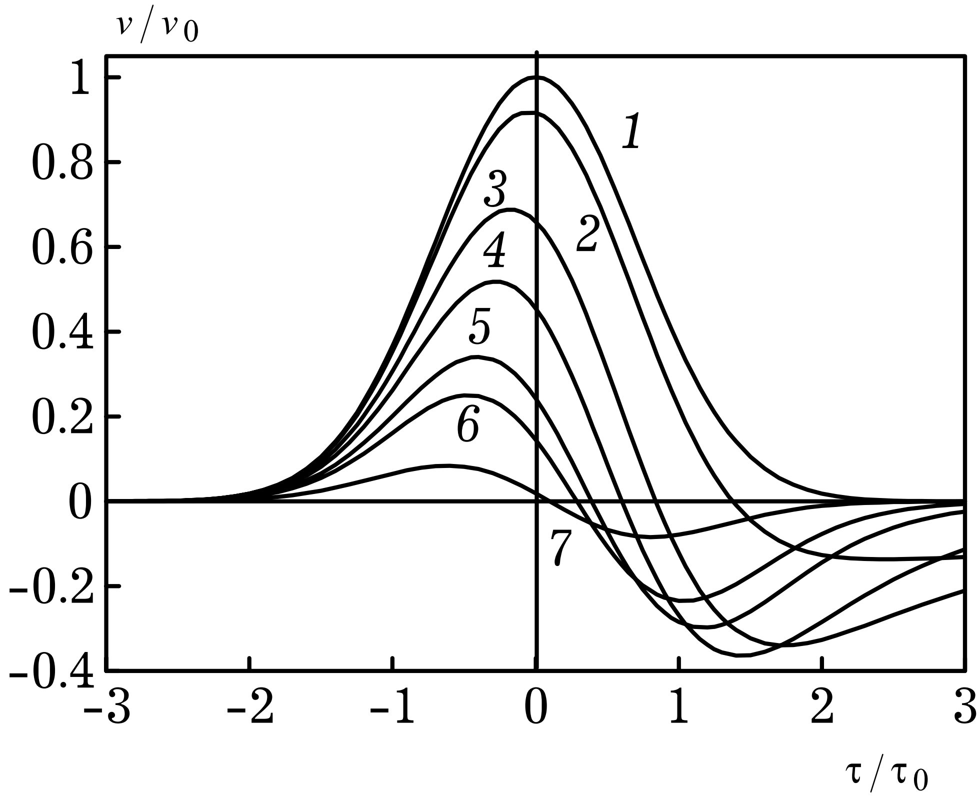

Рис.3.8. Дифракционная трансформация оптоакустического импульса, возбуждаемого при жесткой границе для следующих значений величины $2c_0 z / a_0^2$: *1* - 0; *2* - 0.1; *3* - 0.5; *4* - 1; *5* - 2; *6* - 3; 7 - 10.

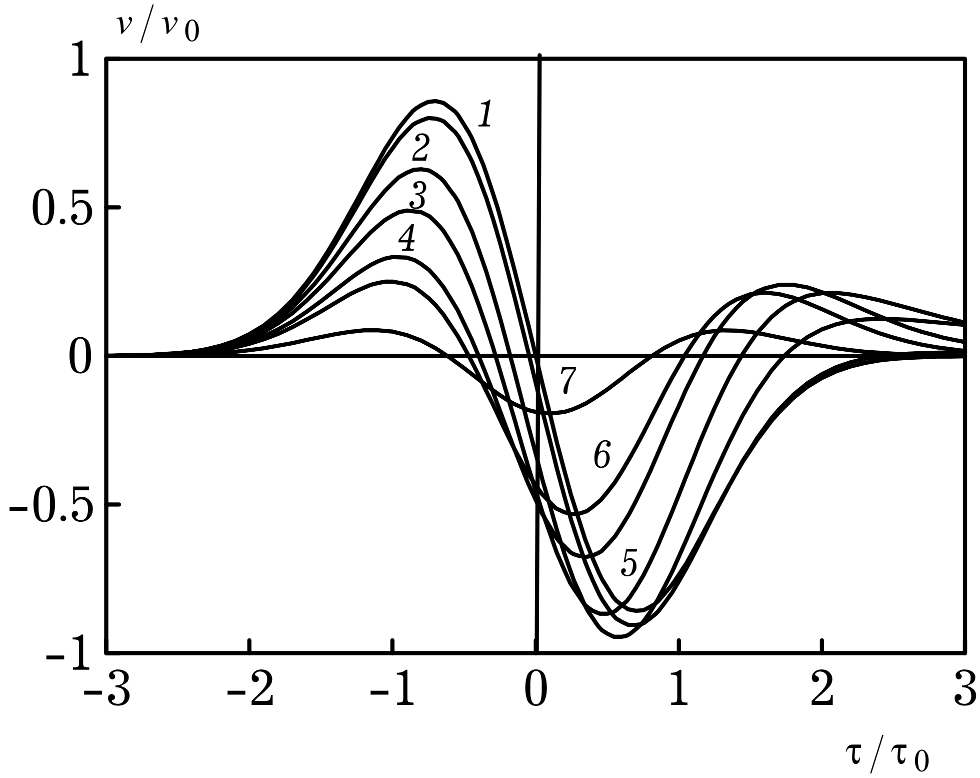

Рис.3.9. Дифракционная трансформация оптоакустического импульса, возбуждаемого при свободной границе для следующих значений величины $2c_0 z / a_0^2$: *1* - 0; *2* - 0.1; *3* - 0.5; *4* - 1; *5* - 2; *6* - 3; 7 - 10.

На расстояниях $z \gg \alpha a^2$ формулу (3.16) можно существенно упростить, так

$$\frac{1}{1 + i z / L_{DF}} \approx -i \frac{\omega a^2}{2 c_0 z}.$$

Поэтому на оси

$$\tilde{v}(\omega, z, \mathbf{r}_\perp = 0) = -i \frac{\omega a^2}{2 c_0 z} K(\omega) \tilde{I}_0(\omega)$$

и, следовательно, профиль волны в дальней зоне будет производной от профиля волны на границе, то есть профиля решения одномерной задачи.

Соотношение масштабов проявления диссипативных и дифракционных явлений описывается безразмерным числом

$$\frac{L_{DF}}{L_{DS}} = \frac{b a^2 \omega^3}{4 \rho_0 c_0^4},$$

которое пропорциональна кубу частоты. На высоких частотах преобладает диссипация, на низких - дифракция. Граничная частота

$$\omega_{SF} = \left(\frac{4 \rho_0 c_0^4}{b a^2} \right)^{1/3}$$

лежит в далеком ультразвуковом диапазоне для $a < 10^{-1}$ см и $b < 1$ пз. Поэтому в практически важных случаях теплового возбуждения звука диссипация будет существенно проявляться в областях резкого изменения профиля - ударных фронтах.

Ударный фронт может образоваться, если длина образования разрыва L_{NL} меньше длины диссипации L_{DS}. Их отношение характеризует число Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{L_{DS}}{L_{NL}} = \frac{2 \rho_0 c_0 \varepsilon}{b \omega} v_a ,$$

где v_a – амплитуда колебательной скорости. При тепловом возбуждении звука эта амплитуда может быть достаточно велика ($M_a \sim 10^{-2}$, см. §1.2). Поэтому при $L_{NL} \ll L_{DS}, L_{DF}$ уравнение (3.14) переходит в уравнение простых волн

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} v \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0,$$

которое имеет известное неявное решение

$$v = v_0 \left(\tau + \varepsilon z v / c_0^2 \right),$$

где $v_0(\tau)$– профиль колебательной скорости на границе $z = 0$, определяемый решением задачи о возбуждении волны. Нелинейная трансформация импульсов, возбуждаемых при жесткой и свободной границах, представлена на рис. 3.10, 3.11. Асимптотика формы этих импульсов представляет собой прямолинейные участки профиля и соединяющие их разрывы. Изменение наклона прямолинейного участка с расстоянием носит универсальный характер:

$$\frac{\partial\tau}{\partial v} = \left(\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)_{z=0} - \frac{\varepsilon}{c_0^2} z\,. \qquad (3.17)$$

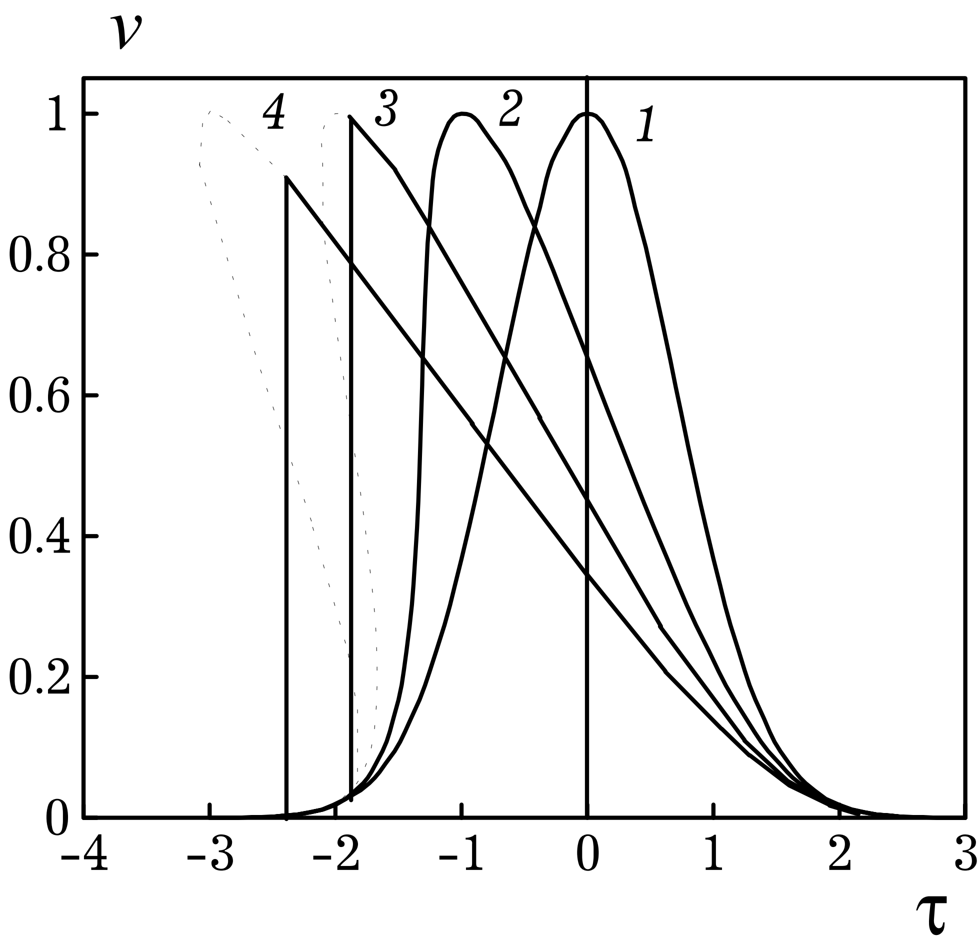

Рис.3.10. Нелинейная трансформация оптоакустического импульса, возбуждаемого при жесткой границе для следующих значений величины σ: *1* - 0; *2* - 1; *3* - 2; *4* - 3.

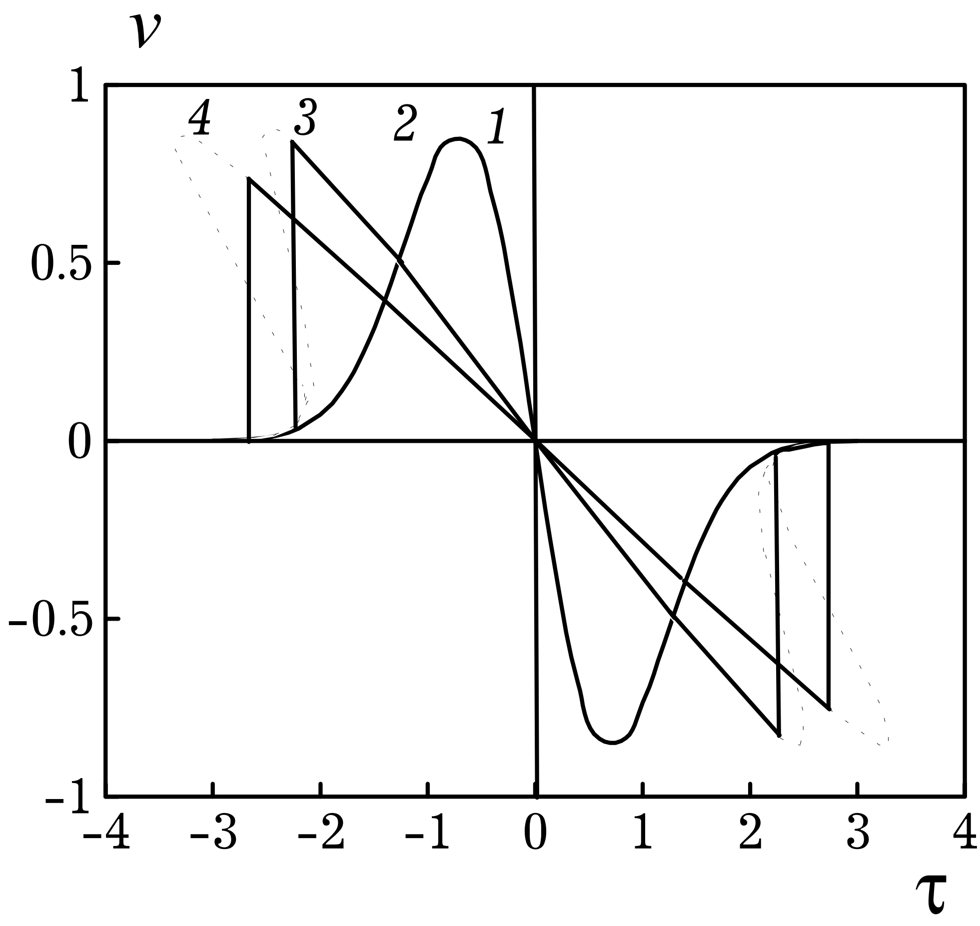

Рис.3.11. Нелинейная трансформация оптоакустического импульса, возбуждаемого при свободной границе для следующих значений величины σ: *1* - 0; *2* - 1; *3* - 2; *4* - 3.

В области ударного фронта уже нельзя пренебрегать влиянием диссипации, которая стабилизирует ширину переходной области. Уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\varepsilon}{c_0^2}v\frac{\partial v}{\partial \tau}-\frac{b}{2\rho_0 c_0^3}\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}=0,$$

описывающее распространение звука в нелинейной диссипативной среде, может быть получено из (3.14) при $L_{NL}, L_{DS} \ll L_{DF}$. Если $\mathrm{Re} \le 1$, то диссипация доминирует, и ударный фронт не образуется. В другом случае $\mathrm{Re} \gg 1$ влияние диссипации существенно только в окрестностях фронтов и ее учет может быть проведен в квазистатическом приближении, когда идеальный разрыв заменяется стационарным решением уравнения Бюргерса

$$v_a \vartheta(\tau - \tau_0) \to v_a \, th(\tau - \tau_0).$$

На рис.3.12, 3.13 приведена трансформация акустических видеоимпульсов в нелинейной диссипативной среде. Сравнение со случаем идеальной среды (рис. 3.10, 3.11) показывает справедливость нашего анализа.

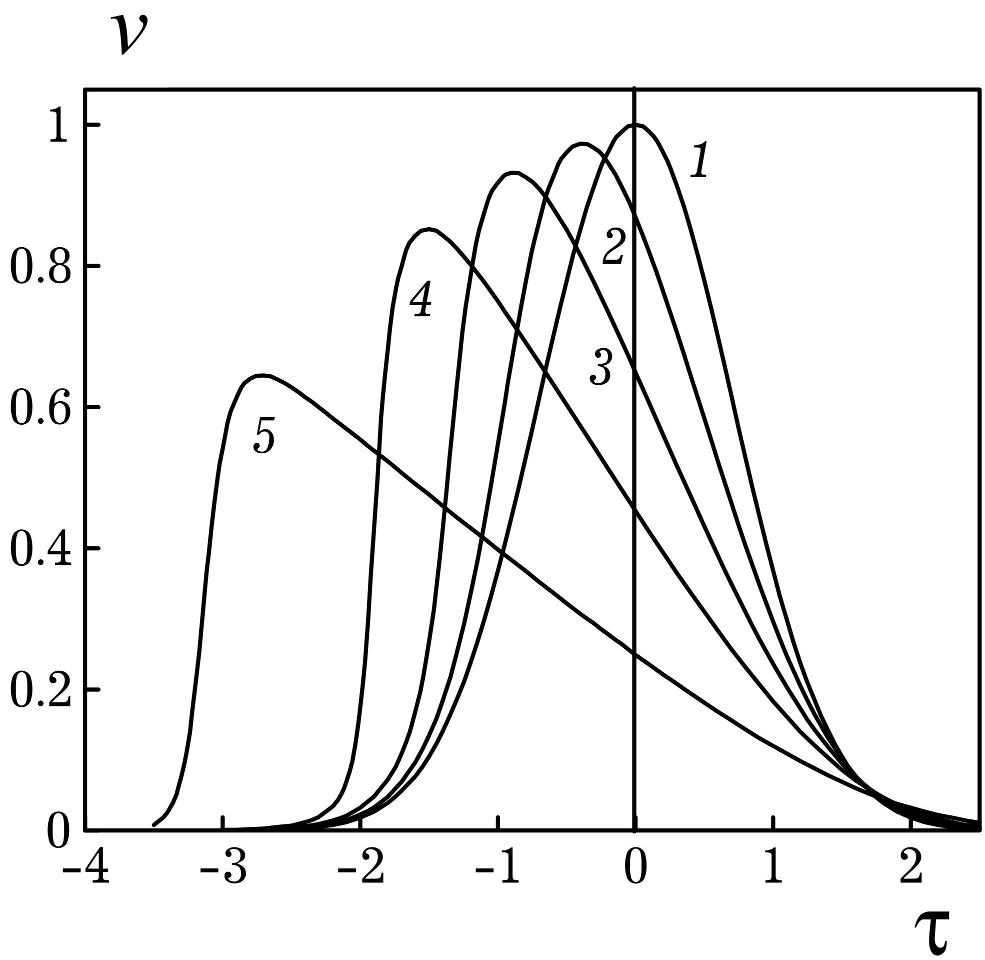

Рис.3.12. Нелинейная трансформация оптоакустического сигнала жесткой границе в диссипативной среде при $\Gamma = 0.1$ для следующих значений величины σ: *1* - 0.1; *2* - 1; *3* - 2; *4* - 5.

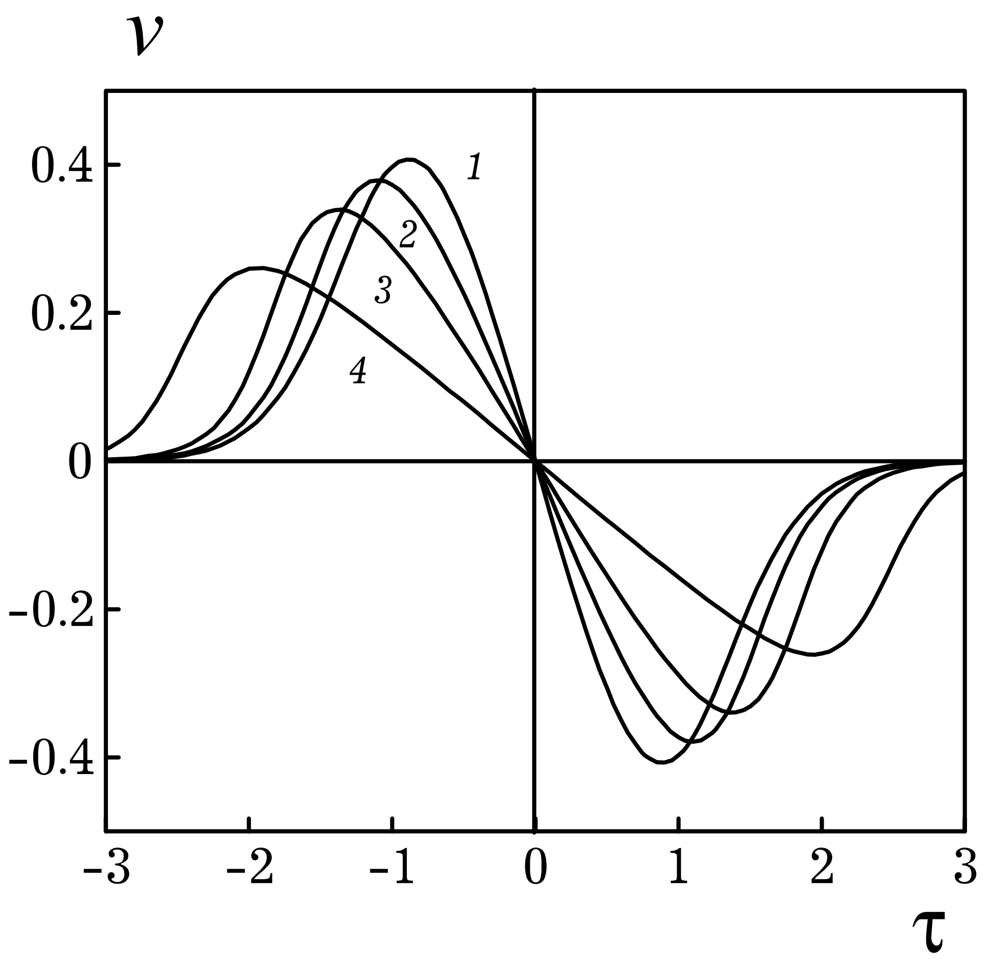

Рис.3.13. Нелинейная трансформация оптоакустического сигнала свободной границе в диссипативной среде при $\Gamma = 0.1$ для следующих значений величины σ: *1* - 0.1; *2* - 1; *3* - 2;
4 - 5.

Таким образом, при тепловом возбуждении звука влияние акустической нелинейности и диссипации проявляется лишь на этапе распространения волны, а влияние дифракции (при $\alpha a \le 1$) может быть существенно уже в области возбуждения. Использованный поэтапный анализ процесса теплового возбуждения звука правильно описывает явление в широком диапазоне параметров.