

§ 4.2. ВОЗБУЖДЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ДВИЖУЩИМСЯ ЛАЗЕРНЫМ ЛУЧОМ В ИДЕАЛЬНОМ ГАЗЕ.

Ограничимся вначале случаем широкого “теплового слоя” и идеального газа:

$$Q(\mathbf{r}, \mu t) = Q(z), \quad b = 0. \quad (4.11)$$

Подставляя (4.11) в (4.10), последнее можно свести к квазилинейному уравнению первого порядка [33].

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (V_0 - c_0 + \varepsilon w) \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{c_0 \beta}{2\rho_0 c_p} Q, \quad (4.12)$$

называемому неоднородным уравнением простых волн. Величина, стоящая в скобках в уравнении (4.12), имеет смысл разницы местного числа Маха и единицы, умноженной на скорость звука:

$$M - 1 = \frac{V_0 + \varepsilon w}{c_0} - 1. \quad (4.13)$$

Уравнение (4.12) может быть решено методом характеристик, которые определяют из системы

$$\frac{dz}{dt} = V_0 - c_0 + \varepsilon w, \quad (4.14)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{c_0 \beta}{2\rho_0 c_v} Q. \quad (4.15)$$

Она может быть сведена к одному уравнению

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\varepsilon c_0 \beta}{2\rho_0 c_v} Q(z) = 0, \quad (4.16)$$

описывающему движение материальной точки в силовом поле Q . Независимая переменная z в (4.16) имеет смысл модифицированной Лагранжевой координаты частицы: из истинного смещения вычтена

меняющаяся со скоростью звука c_0 величина. Однако, в отличие от традиционной задачи механики, процесс описывается не одной точкой, а континуумом материальных точек, в данном приближении движущихся независимо друг от друга.

При условии (4.11) уравнения (4.14)-(4.15) могут быть проинтегрированы в квадратурах^[30,33]. Первый интеграл системы (4.14)-(4.15) является решением стационарного (при $\partial w / \partial t = 0$) уравнения (4.12):

$$\frac{\varepsilon w^2}{2} + (V_0 - c_0) w + \frac{c_0 \beta}{2 \rho_0 c_p} F(z) = \frac{c_0 \beta}{2 \rho_0 c_p} F_0 = const, \quad (4.17)$$

где $dF/dz = Q(z)$ – аналог потенциальной функции при движении материальной точки. В силу стационарности оно определяет линии постоянного расхода газа на плоскости (z, w) . Более того, в силу независимости движения изображающих точек, каждая из них сохраняет во времени значение расхода, имевшего место в начальный момент.

Подставляя (4.17) в (4.14), найдем еще один интеграл движения:

$$t = t_0 \mp \int \left[(V_0 - c_0)^2 + \frac{\varepsilon c_0 \beta}{\rho_0 c_v} (F_0 - F(\xi)) \right]^{-1/2} d\xi. \quad (4.18)$$

Интегралы (4.17), (4.18) задают двухпараметрическое семейство решений. Связь между константами интегрирования t_0 и F_0 , определяющая одно из этого семейства решений, может быть найдена из начального условия

$$w(t=0, z) = w_0(z). \quad (4.19)$$

Используя (4.17)-(4.9), решение задачи (4.12), (4.19) может быть представлена в неявном виде (аналогично в^[30]):

$$t = \pm \int_{z_0}^z \left[(V_0 - c_0 + \varepsilon w_0(z))^2 + \frac{\varepsilon c_0 \beta}{\rho_0 c_v} (F(z) - F(\xi)) \right]^{-1/2} d\xi. \quad (4.20)$$

Здесь z_0 определяется из условия

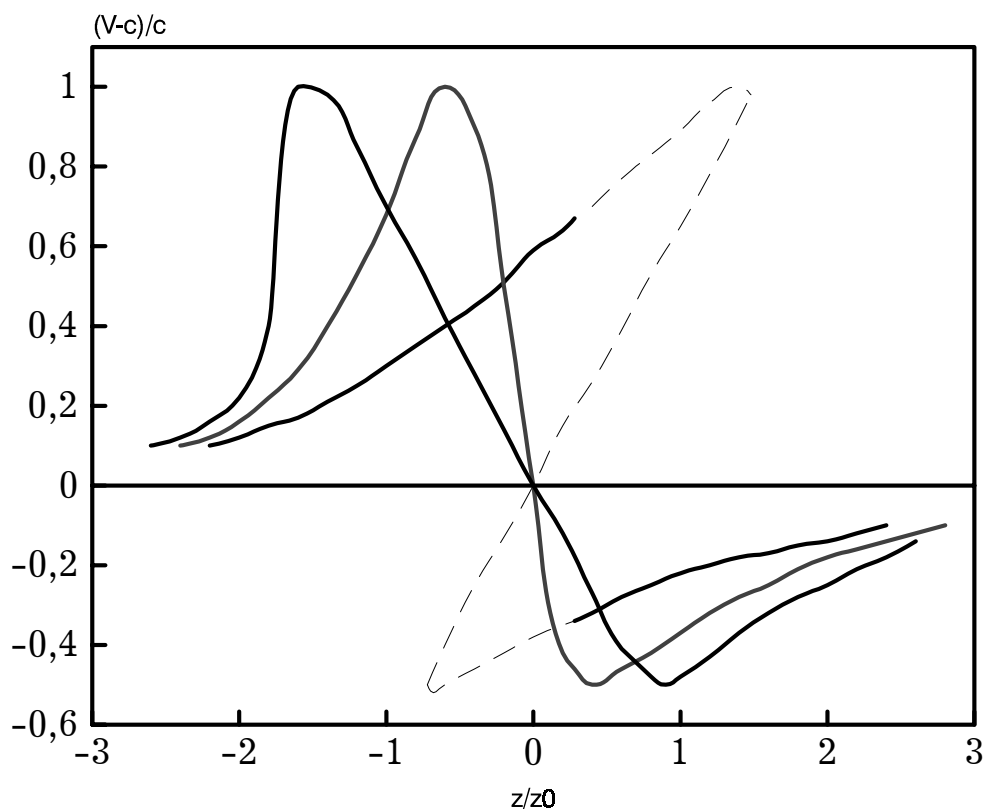
$$(V_0 - c_0 + \varepsilon w_0(z_0))^2 + \frac{\varepsilon c_0 \beta}{\rho_0 c_v} F(z_0) = (V_0 - c_0 + \varepsilon w(z))^2 + \frac{\varepsilon c_0 \beta}{\rho_0 c_v} F(z) \quad (4.21)$$

и имеет смысл “начальной координаты” точки.

Решение (4.20) удобно анализировать на фазовой плоскости $(z, V_0 - c_0 + \varepsilon w)$ [42]. При этом, однако, необходимо следить за движением не одной изображающей точки, а целого их континуума - изображающего профиля. В силу решения (4.20) каждая из точек профиля движется на фазовой плоскости независимо от других по проходящей через нее стационарной траектории. Скорость их движения вдоль оси z определяется, в соответствии с (4.14), текущей координатой точки. В верхней полуплоскости точки движутся вправо по оси z (локально сверхзвуковое движение), в нижней - влево (локально дозвуковое движение).

Трансформация пространственного распределения скорости может быть прослежена следующим образом: на фазовой плоскости изображается кривая зависимости местного числа Маха потока от координаты в начальный момент времени. С течением времени точки начального профиля смещаются вдоль проходящих через них стационарных траекторий (4.17) со скоростью (4.14), формируя профиль в последующие моменты времени. Поскольку стационарные траектории (4.17) соответствуют определенному значению расхода газа, то можно сказать, что каждая точка начального профиля сохраняет в процессе движения (“помнит”) начальную величину расхода.

Рассмотрим вначале свободное распространение акустической волны ($Q=0$). В этом случае траектории движения изображающих точек (4.17) будут прямыми $w=const$ (см. рис.4.1 - тонкие линии со стрелками). Трансформация профиля волны представлена жирными линиями в последовательные моменты времени. Эти профили образуются перемещением точек начального профиля вправо (в верхней полуплоскости), либо влево (в нижней полуплоскости) со скоростями, пропорциональными их ординатам. В отсутствие внешних источников ($Q=0$) скорость движения изображающих точек постоянна.



Образующаяся неоднозначность решения (“перехлест” профиля) в некоторых случаях может иметь физический смысл - для волн в потоках частиц^[37]. В случае же сплошной среды при нарастании градиентов, вообще говоря, необходимо учитывать эффекты, исключенные в модели (4.12), такие, например, как диссипация. Этот

учет (в пределе исчезающей слабости этих эффектов) может быть произведен введением разрыва. Его положение определяется из общих интегральных соотношений. Так как площадь элемента фазовой плоскости $dzdw$ в модели (4.12) не зависит от времени^[28,29], то сохраняется “площадь” возмущения над стационарной траекторией: интегрируя (4.12), найдем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} w dz = -\frac{1}{2\varepsilon} \left[(V_0 - c_0 + \varepsilon w)^2 + \frac{2c_0 \beta}{\rho_0 c_p} F(z) \right]_{-\infty}^{+\infty}. \quad (4.22)$$

Соотношение (4.22) позволяет найти положение разрыва. Физический смысл его достаточно прозрачен и отражает закон сохранения массы возмущения.

Наличие источников тепла приводит к искривлению фазовых траекторий. На рис.4.2 приведена фазовая плоскость для колокообразного распределения тепловых источников

$$Q = Q_0 ch^{-2}(z/l). \quad (4.23)$$

Эта форма выбрана из возможности аналитического представления решения (4.20)-(4.21)^[31], которое ввиду громоздкости не приводится.

Траектории изображающих точек описываются уравнением

$$\frac{1}{2\varepsilon} (V_0 - c_0 + \varepsilon w)^2 + \frac{Q_0 l c_0 \beta}{2\rho_0 c_p} th \frac{z}{l} = const = \frac{Q_0 l c_0 \beta}{2\rho_0 c_p} F_0. \quad (4.24)$$

Траектории, для которых $F_0 > 1$, простираются вдоль всей оси z . При $-1 < F_0 < 1$ траектории имеют точку поворота и соответствуют недопустимо большим расходам газа. Сепаратриса $F_0 = 1$ соответствует течению торможения либо разгона потока до местной звуковой скорости. На больших расстояниях от области тепловыделения $|z| \geq l$ траектории переходят в прямые,

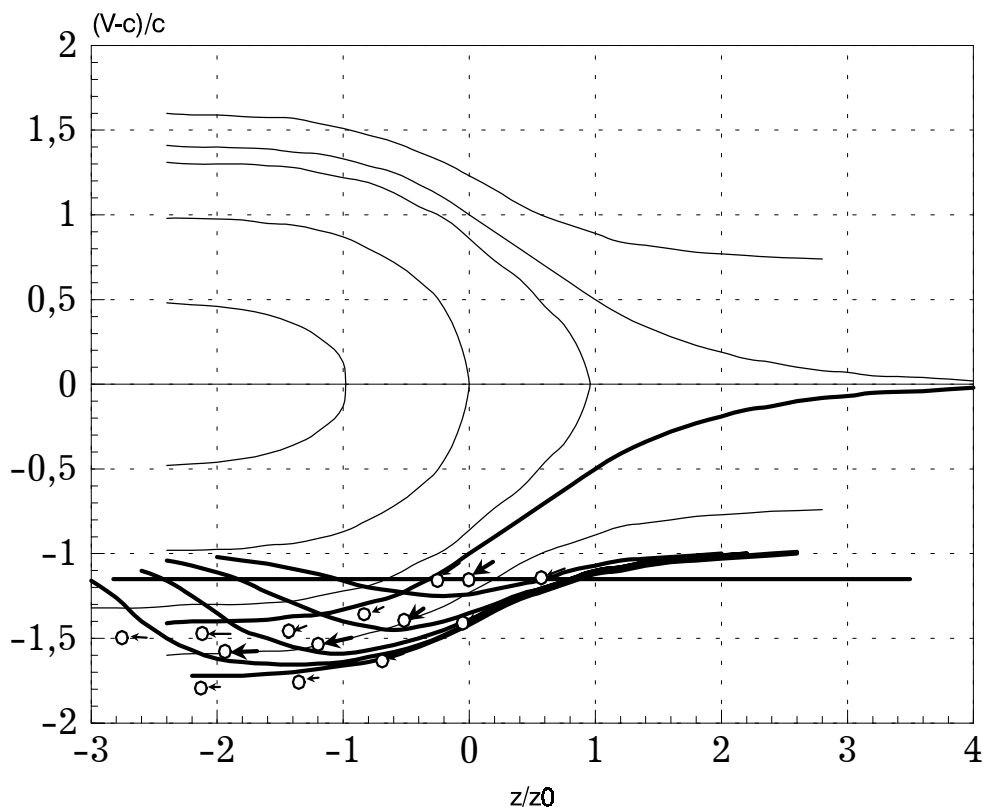
параллельные оси z -волны распространяются практически свободно (см. рис. 4.1).

Будем считать, что в момент включения источников тепла $t=0$ поток будет не возмущен (см. (4.19)):

$$w_0(z) = 0. \quad (4.25)$$

Поэтому исходный профиль - прямая, параллельная оси z . Эволюция профиля существенным образом зависит от начального числа Маха потока $(V_0 - c_0)/c_0$ и его отношения к изменению местной скорости звука за счет нагрева.

Для дозвукового начального потока $(V_0 - c_0)/c_0 < 0$ (рис.4.3а) все точки профиля смещаются влево по оси z (для любой точки профиля во все время движения $V_0 - c_0 + \epsilon w < 0$).



Сначала возмущение нарастает, потом выносится из области тепловыделения, в нем образуется разрыв - слабая ударная волна - который распространяется навстречу потоку. Когда величина

разрыва станет равной амплитуде возмущения (точка максимума амплитуды “обгонит” разрыв), распределение числа Маха потока в зоне тепловыделения стабилизируется [42]. В дальнейшем происходит свободное распространение разрыва. Как видно, именно акустическая нелинейность определяет время установления и профиль распределения скорости при тепловом возбуждении звука синхронными источниками.

Стационарное течение AA' формируется при движении точки $A(+\infty, \Delta_0)$ и при этом происходит перестройка течения при $z \rightarrow \infty$. Времена образования разрыва, стабилизации формы волны, зависимость амплитуды возмущения от числа Маха V_0/c_0 движения источников были найдены в [31,34,41]. На рис.4.3а представлено распределение нормированного числа Маха потока

$$\delta = \frac{V_0 - c_0 + \varepsilon w}{\sqrt{\varepsilon c_0 \beta Q_0 l / 2 \rho_0 c_p}} \quad (4.26)$$

для $\Delta_0 = -1.5$ в последовательные моменты времени

$$t/t_0 = t \sqrt{\varepsilon c_0 \beta Q_0 / 2 \rho_0 c_p l} = 0; 0.6; 1.2; \infty. \quad (4.27)$$

Безразмерная величина

$$\delta_T = \frac{V_0 - c_0}{\sqrt{\varepsilon c_0 \beta Q_0 l / 2 \rho_0 c_p}} \quad (4.28)$$

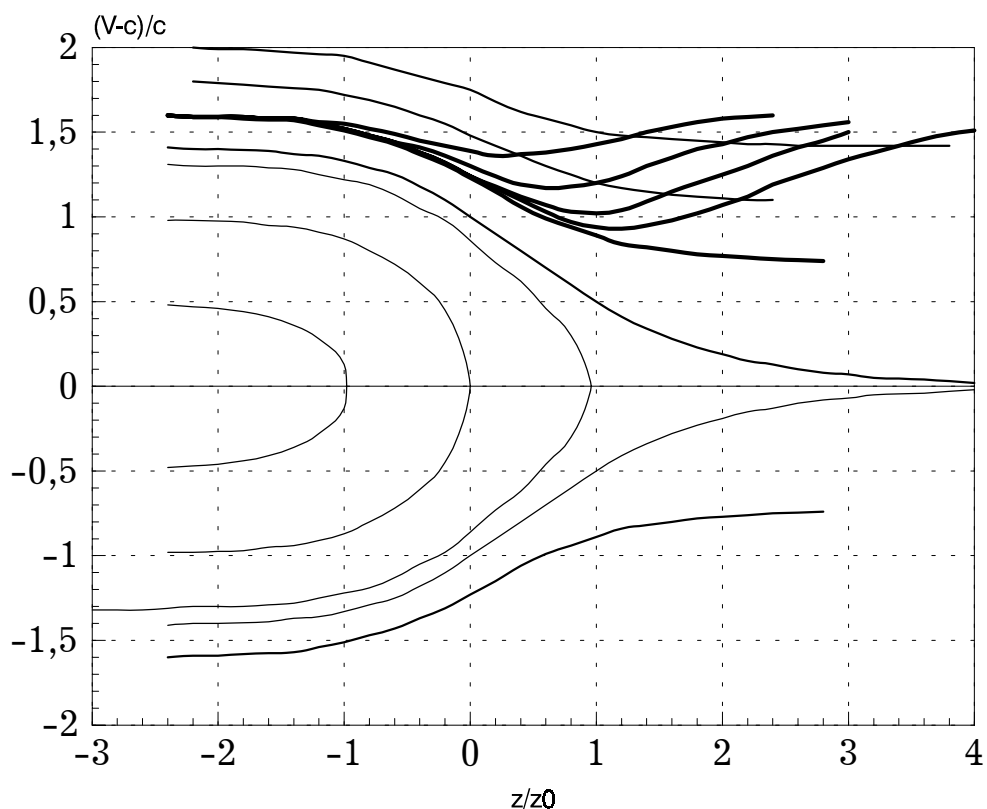
может служить параметром подобия для процессов возбуждения акустических волн синхронно движущимися тепловыми источниками.

Для полностью сверхзвукового потока

$$\Delta_0 = \frac{V_0 - c_0}{\sqrt{\varepsilon c_0 \beta Q_0 l / 2 \rho_0 c_p}} > \sqrt{2} \quad (4.29)$$

все точки начального профиля лежат на траекториях, не имеющих точек поворота (для всех точек профиля $F_0 > 1.3$ см (4.24)), и

сдвигаются вправо по оси z (рис.4.3б).



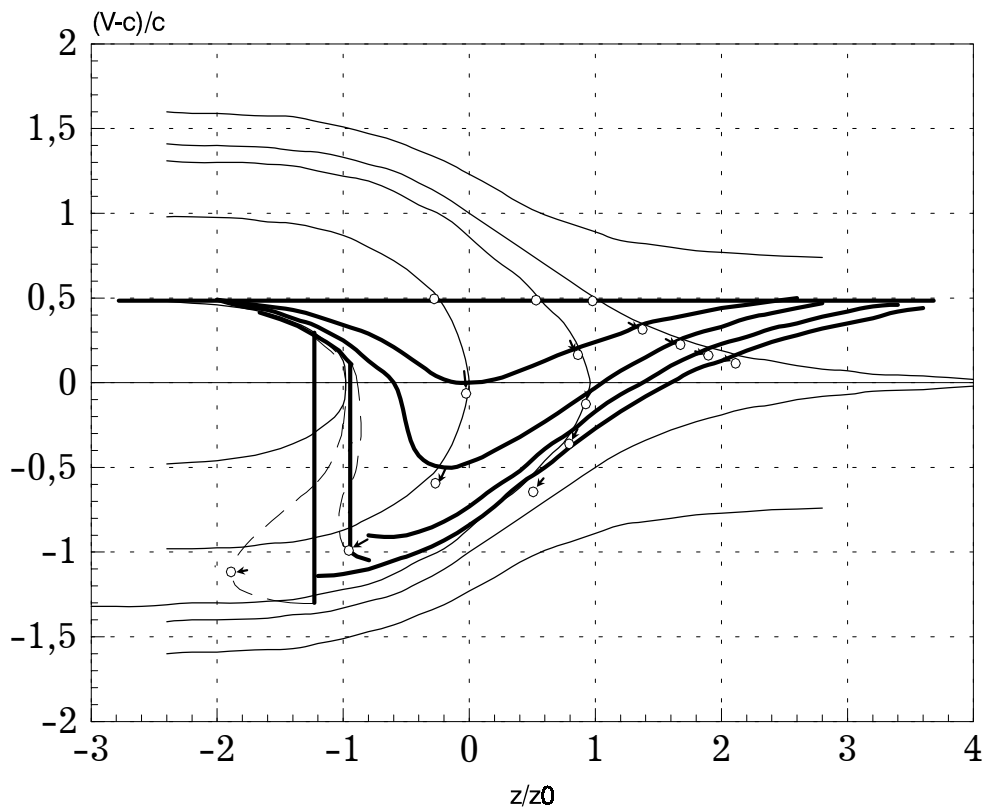
Разрыва в профиле не образуется. Стационарное течение BB' формируется при движении точки $B(-\infty, \Delta_0)$. Течение остается везде сверхзвуковым. На рис.4.3б изображено распределение числа Маха потока в последовательные моменты времени $t/t_0 = 0; 1; 2; \infty$ для $\Delta_0 = 1.6$.

В промежуточном (истинно трансзвуковом) случае (рис.4.3в) $0 < \delta < \sqrt{2}$ точки, лежащие на траекториях с точкой поворота (левее точки C), смещаются сначала по потоку, а затем поворачивают и движутся навстречу потоку. Так формируется собственно трансзвуковое течение, содержащее точки перехода через скорость звука. В этом режиме разрыв может формироваться внутри области тепловыделения. Точки, лежащие правее C , движутся так же, как и в случае полностью сверхзвукового течения. Поэтому течение возмущено как вверх, так и вниз по потоку от источников.

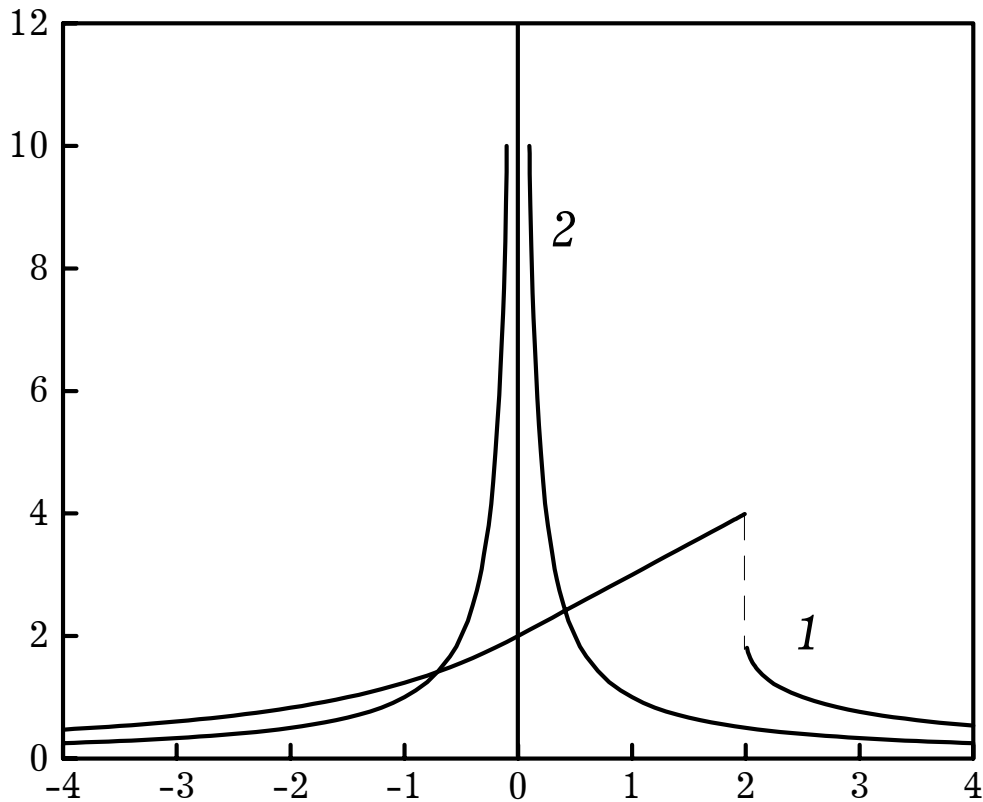
Формирование стационарного течения $C'S''$ происходит при движении точек начального профиля, лежащих в окрестности точки C пересечения его с сепаратрисой. Устанавливающееся распределение числа Маха в собственно трансзвуковом течении не зависит от числа Маха движения источников и совпадает с сепаратрисой. Оно описывается формулой

$$M = 1 - \left(\epsilon \beta Q_0 l / \rho_0 c_0 c_p \right)^{1/2} \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{z}{l} \right).$$

На рис.4.3в приведены профили течения в моменты времени $t/t_0 = 0; 2; 4; \infty$ для $\Delta_0 = 0.5$.



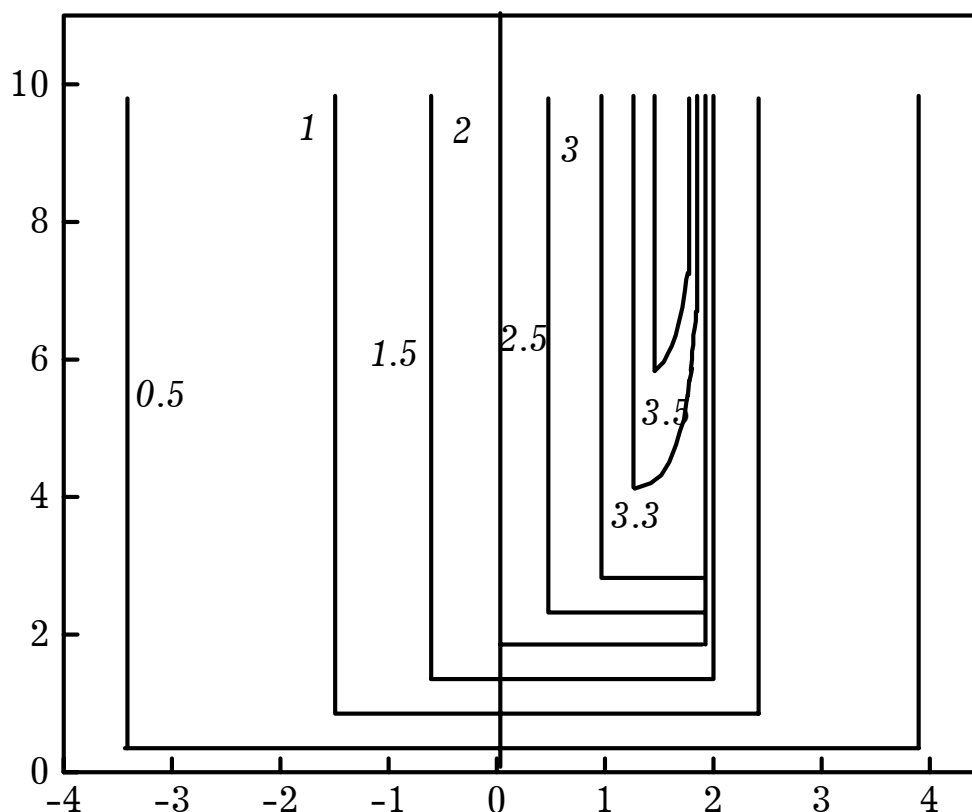
Рассмотренные выше особенности формирования возмущений в различных режимах движения источников позволяют найти зависимость максимальной амплитуды волны от скорости источников^[21]. Она изображена на рис.4.4^[31,34], для сравнения дана зависимость для линейного случая.



Акустическая нелинейность не только стабилизирует амплитуду волны (которая остается ограниченной при всех режимах движения источников), но и смещает точку наибольшей эффективности возбуждения в область сверхзвукового движения источников. Этот факт может быть объяснен следующим образом. Наличие возмущения приводит к увеличению локальной скорости звука и при сверхзвуковом движении источников эффективная расстройка скорости источников и волны уменьшается, что приводит к повышению эффективности возбуждения - волна и источники тепла взаимодействуют более продолжительное время. Эти эффекты наиболее сильны на режимах, близких к переходу от смешанного к чисто сверхзвуковому течению ($\Delta_0 \approx \sqrt{2}$).

Сказанное свидетельствует о существенном увеличении времени, необходимого для достижения максимальной амплитуды волн, по мере приближения к $\delta_0 = \sqrt{2}$. На рис.4.5 представлены

“изолинии” этого времени в зависимости от режима движения источников для различных значений амплитуды (цифры у кривых).



Критерий трансзвукового подобия для одномерного обтекания слоя тепловыделения (4.28) может быть приведен к виду

$$\delta_T = (M_0 - 1)(\epsilon \beta \Delta T)^{-1/2}$$

(с точностью до постоянного коэффициента, ср. с [43] при цилиндрической геометрии луча). Здесь $\Delta T = 2Q_0 l / \rho_0 c_0 c_p$ – разница температур газа выше и ниже по потоку от области теплоподвода. Нелинейность приводит к тому, что акустическое возмущение пропорционально не относительному изменению температуры $\beta \Delta T$, а квадратному корню из него. Таким образом, акустическое возмущение имеет меньший порядок малости, чем тепловое.

Характерный временной масштаб развития возмущения (4.27) также определяется акустическими нелинейными эффектами:

$$t_0 \sim \frac{l}{c_0} (\varepsilon \beta \Delta T)^{-1/2},$$

и существенно превышает время прохода частиц через область тепловыделения l/c_0 .

К подобным, описанным выше трансформациям потока может приводить не только тепловая, но и другие типы воздействия - массо- и энергоподвод, например,^[33]. Критерий подобия в случае массоподвода в трансзвуковом потоке имеет вид:

$$\delta_m = (M_0 - 1) (\varepsilon \Delta q / \rho_0 c_0)^{-1/2},$$

где Δq - количество вводимой в поток извне (или отбираемой, тогда $\Delta q < 0$) массы на единицу площади поперечного сечения потока. Соответствующий временной масштаб развития возмущения аналогичен t_0 :

$$t_1 = \frac{l}{c_0} (\rho_0 c_0 / \varepsilon \Delta q)^{1/2}$$

и также существенно превышает время пробега частиц по области внешнего воздействия.

Если поток совершает (или над ним совершают) механическую работу P (на единицу площади поперечного сечения), то критерий подобия имеет вид

$$\delta_p = (M_0 - 1) (\varepsilon P / \rho_0 c_0^3)^{-1/2},$$

а соответствующий временной масштаб -

$$t_2 = \frac{l}{c_0} (\rho_0 c_0^3 / \varepsilon P)^{1/2}.$$

Как видно, во всех случаях синхронность воздействия и акустическая нелинейность приводит к тому, что возбуждаемое акустическое возмущение имеет более низкий порядок малости, чем само воздействие.

Масса газа, переносимого возмущением, Δm - может быть определена как

$$\Delta m = \beta q t / 2 c_p,$$

где q - поток тепла, подводимый к газу. Величина Δm пропорциональна площади возмущения на фазовой плоскости и растет линейно со временем. Она не зависит от скорости движения источников, однако величиной M_0 определяется распределение возмущения в пространстве и направление его смещения относительно источников.

В дозвуковом случае ($V_0 < c_0$) все возмущение смещается навстречу потоку; в сверхзвуковом случае ($M_0 > \sqrt{2}$) возмущение сносится потоком за область действия источников. В промежуточном случае возмущение распространяется как вверх по потоку, так и вниз по потоку от источников; доля массы возмущения, распространяющейся навстречу потоку в этом случае зависит от конкретного вида распределения источников в пространстве и числа Маха движения источников M_0 .

Кинетическая энергия возмущения относительно газа связана с количеством подведенного тепла соотношением

$$\Delta m c_0^2 / 2 = (\gamma - 1) q t / 4, \quad (4.30)$$

где γ - показатель адиабаты. При этом достигается максимальная эффективность преобразования тепловой энергии в механическую форму $(\gamma - 1) / 4$. Эта эффективность достигается даже при слабом воздействии на поток. Такой способ возбуждения волны представляется наиболее эффективным.

Описанный в настоящем параграфе метод фазовой плоскости

послужил основой для решения целого ряда задач как в оптоакустике движущейся среды, так и в смежных областях. Так, в^[45] было проанализировано возбуждение звука лазерным лучом в потоке релаксирующего газа, в^[44] при равнопеременном движении луча, в^[42] - для луча конечных размеров; анализ возбуждения волн на поверхности жидкости движущейся системой атмосферного давления методом фазовой плоскости был проведен в^[27]. Численное моделирование обтекания цилиндрического лазерного луча потоком сжимаемого газа^[50,51] показало, что описанные выше аналитические результаты качественно правильно описывают явление даже для цилиндрической (а не близкой к плоской) геометрии луча.