

### § 4.3. АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ОКОЛОЗВУКОВОЙ ОБЛАСТИ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА.

Предложенный выше метод фазовой плоскости может быть эффективно использован для анализа классических задач внутренних трансзвуковых течений.

Распространение акустических возмущений в околозвуковом потоке имеет свои особенности. С точки зрения линейной теории отличие от случая неподвижной среды сводится к изменению скорости распространения волн на величину скорости потока. Для попутной потоку волны такое рассмотрение достаточно. Однако для встречной волны принципиальными могут оказаться нелинейные эффекты. Действительно, встречная волна за время прохождения рассматриваемой области пробегает относительно газа больший путь и поэтому успевают накопиться нелинейные искажения<sup>[9]</sup>. Чем ближе скорость потока к скорости звука, тем в большей степени это проявляется. При трансзвуковом режиме течения линеаризация задачи по возмущениям вообще невозможна<sup>[36]</sup>. Новые особенности появляются при неоднородном характере потока: участки неоднородности движутся относительно газа с околозвуковой скоростью и поэтому являются для обратной волны квазисинхронными источниками, эффективно на нее воздействуя.

Таким образом, учет нелинейности в околозвуковом потоке необходим. Это вызывает большие трудности при теоретическом описании. Основным методом решения задач здесь является численное интегрирование<sup>[60]</sup>. Рассматривались случаи, когда

источник звука находился как ниже по потоку относительно околосвуковой области [36,61], так и выше по потоку [62,63]. В то же время уравнения для околосвукового потока могут быть существенно упрощены использованием соответствующей асимптотики [33,36], причем встречная волна эффективно анализируется на фазовой плоскости [33]. Отражение от области неоднородности возмущений ступенчатого вида допускает такой анализ и при распространении их по потоку [64]. В данном параграфе рассматривается околосвуковой поток с возмущениями гармонического вида.

Уравнения гидродинамики для квазиодномерного течения невязкого нетеплопроводящего идеального газа в трубе переменного сечения при наличии внешних сил тепло- и массоподвода могут быть сведены к виду

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x} \right] \left( u \pm \frac{2c}{\gamma - 1} \right) = \pm c \left[ \frac{Q}{(\gamma - 1)c_v T} + \frac{q}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} \right] + g + \frac{c^2}{\gamma(\gamma - 1)} \frac{\partial S'}{\partial x}, \quad (4.31)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) S' = \frac{Q}{c_v T}.$$

Здесь  $u$  – скорость потока,  $c$  – скорость звука,  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $S' = (S - S_0) / c_v$  ( $S, S_0$  – энтропия и ее характерное значение),  $c_v$  – удельная теплоемкость,  $\rho$  – плотность газа,  $q$  – скорость производства массы в единице объема,  $Q$  и  $g$  – подводимая тепловая мощность и внешняя сила на единицу массы газа,  $T$  – температура,  $f = \ln [A_0 / A(x, t)]$ , где  $A, A_0$  – площадь

сечения трубы и ее характерное значение. Видно, что в потоке могут возбуждаться три вида возмущений - акустические, соответствующие двум направлениям распространения звука, и возмущения энтропии, переносимые потоком. Структура источников, стоящих в правой части (4.31), может быть различной. Здесь ограничимся рассмотрением потока в сужающейся-расширяющейся трубе (сопло Лаваля), остальные источники будем считать отсутствующими:  $S', Q, q, g, \partial f / \partial t = 0$ . Введем обозначения:

$$R' = [(u - u_0) + 2(c - c_0) / (\gamma - 1)] / 2c_0,$$

$$L' = [(u - u_0) - 2(c - c_0) / (\gamma - 1)] / 2c_0,$$

где величины с индексом "0" относятся к критическому (минимальному) сечению трубы при установившемся потоке. Возмущения величин  $R'$  и  $L'$  - суть волны, распространяющиеся соответственно по потоку и против потока. Пусть  $R', L' \sim \mu$ , где  $\mu \ll 1$  малый параметр. Из (4.31) в квадратичном по  $\mu$  приближении получим уравнения для  $R'$  и  $L'$ :

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial R'}{\partial t} + [M_0 + 1 + (2 - \varepsilon)L' + \varepsilon R'] \frac{\partial R'}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{df}{dx}, \quad (4.32)$$

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial L'}{\partial t} + [M_0 - 1 + \varepsilon L' + (2 - \varepsilon)R'] \frac{\partial L'}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{df}{dx}. \quad (4.33)$$

Здесь  $M_0 = u_0 / c_0$  - число Маха стационарного потока в критическом сечении. Будем интересоваться такой окрестностью критического сечения, где  $f \sim \mu^2$ . Из уравнения (4.32) видно, что  $R'$  - возмущения проходят через указанную область быстро, со скоростью  $\sim c_0(M_0 + 1)$ , и их изменением ( $\sim \mu^2$ ) можно пренебречь. Поэтому решение уравнения (4.32) выписывается сразу:

$$R'(x, t) = \varphi\left(t - x / (u_0 + c_0)\right),$$

здесь отброшены члены  $\sim \mu^2$ ,  $\varphi(t)$  – некоторая функция, определяемая граничными условиями. То же самое заключить для  $L'$ -волны, вообще говоря, нельзя – при околосвуковом режиме, который здесь будет рассматриваться, ситуация для этой волны иная. Если  $(M_0 - 1) \sim \mu$ , то возмущения, движущиеся против потока со скоростью  $\sim c_0(M_0 - 1)$ , находятся в области источников долго, и их изменением пренебречь нельзя. Примем  $f(x) = -\alpha^2 x^2$  ( $\alpha = \text{const}$ ), что всегда выполняется вблизи критического сечения. По условию  $f \sim \mu^2$  протяженность рассматриваемой области  $-l \leq x \leq l$  должна удовлетворять соотношению  $\alpha l \sim \mu$ . Удобно перейти к следующим переменным:

$$z = (x/l), \quad \tau = \sqrt{\varepsilon} \alpha c_0 t, \quad R = \frac{\sqrt{\varepsilon} R'}{\alpha l}, \quad L = \frac{\sqrt{\varepsilon} [L' + (M_0 - 1)/\varepsilon]}{\alpha l}.$$

Получим

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} + (L + kR) \frac{\partial L}{\partial z} = z, \quad k = \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon}, \quad -1 \leq z \leq 1. \quad (4.34)$$

По смыслу величин  $R$  и  $L$  граничные условия для них нужно задавать соответственно при  $z = -1$  и  $z = 1$ :

$$R(z = -1, \tau) = I_R(\tau), \quad L(z = 1, \tau) = I_L(\tau),$$

где  $I_R, I_L$  – заданные функции. Как уже отмечалось, попутная волна не меняется при прохождении рассматриваемой области, поэтому

$$R(z, \tau) = I_R(\tau - \beta(z + 1)/2), \quad \beta = \sqrt{\varepsilon} \alpha l. \quad (4.35)$$

Число Маха  $M$  потока связано с  $L$  и  $R$  следующим образом:

$$M - 1 = \beta(L + kR).$$

При отсутствии возмущений из (4.34) следует:

$$R_{CT} = 0, \quad L_{CT} = -\sqrt{L_0^2 + z^2}$$

- поток предполагается дозвуковым. В настоящем параграфе будет изучен случай гармонических функций  $I_R, I_L$ . Ниже рассматриваются две ситуации. Первая: при  $z=1$  задано встречное возмущение, а попутная волна отсутствует ( $I_R = 0$ ). Вторая ситуация обратная: на критическую область падает попутная волна, а встречной волны при  $z=1$  нет ( $I_L = const$ ).

Итак, пусть

$$I_R = 0, \quad I_L(\tau) = L_1 + W \sin \Omega \tau,$$

где  $W$  – амплитуда,  $\Omega$  – частота падающей встречной волны,

$L_1 = -\sqrt{L_0^2 + 1}$  задает число Маха невозмущенного потока в

критическом сечении:  $M_0 - 1 = -\beta \sqrt{L_1^2 - 1}$ ,  $L_1 < -1$ . Проанализируем

сначала случай малых возмущений стационарного потока:

$W \ll L_{CT}(z)$ . Линеаризуя уравнение (4.34) по возмущению  $\tilde{L} = L - L_{CT}$ ,

получим

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tau} + \frac{\partial (L_{CT} \tilde{L})}{\partial z} = 0,$$

отсюда

$$\tilde{L}(z, \tau) = \tilde{L} \left( z=1, \tau - \int_1^z \frac{dz'}{L_{CT}(z')} \right) \frac{L_1}{L_{CT}(z)}. \quad (4.36)$$

Таким образом, в линейном приближении поведение возмущений характеризуется двумя особенностями. При приближении к критическому сечению, во-первых, скорость их движения уменьшается, во-вторых, происходит некоторое их усиление. Оба этих обстоятельства при конечной амплитуде возмущений

увеличивают влияние нелинейности по сравнению со случаем однородного потока. Рассмотрим уравнение (4.34). Его решение находится в неявном виде:

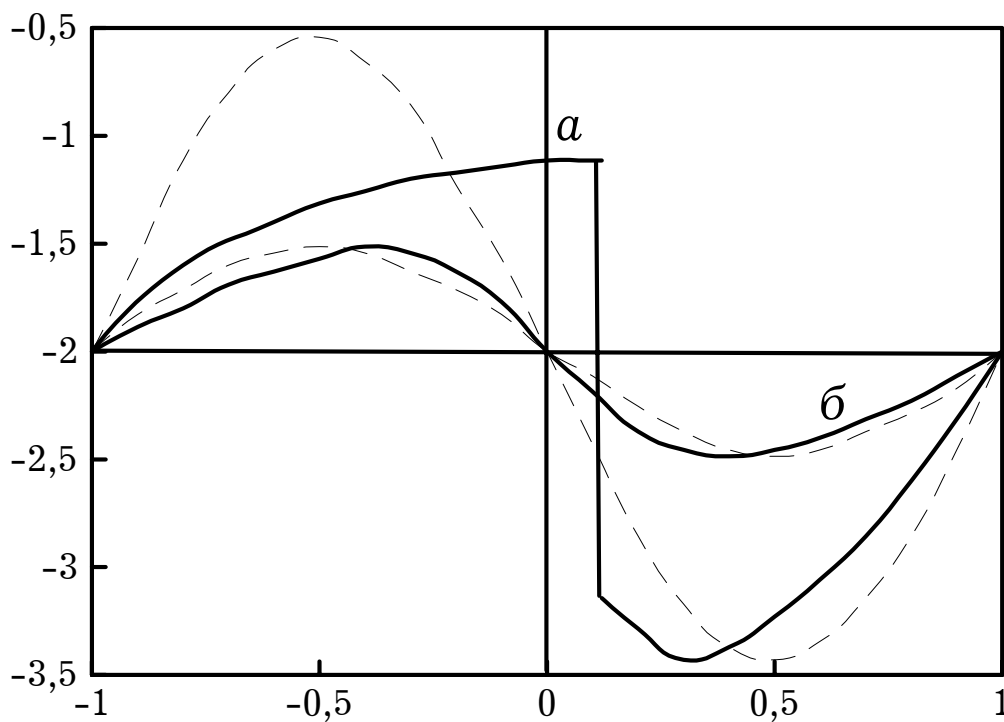
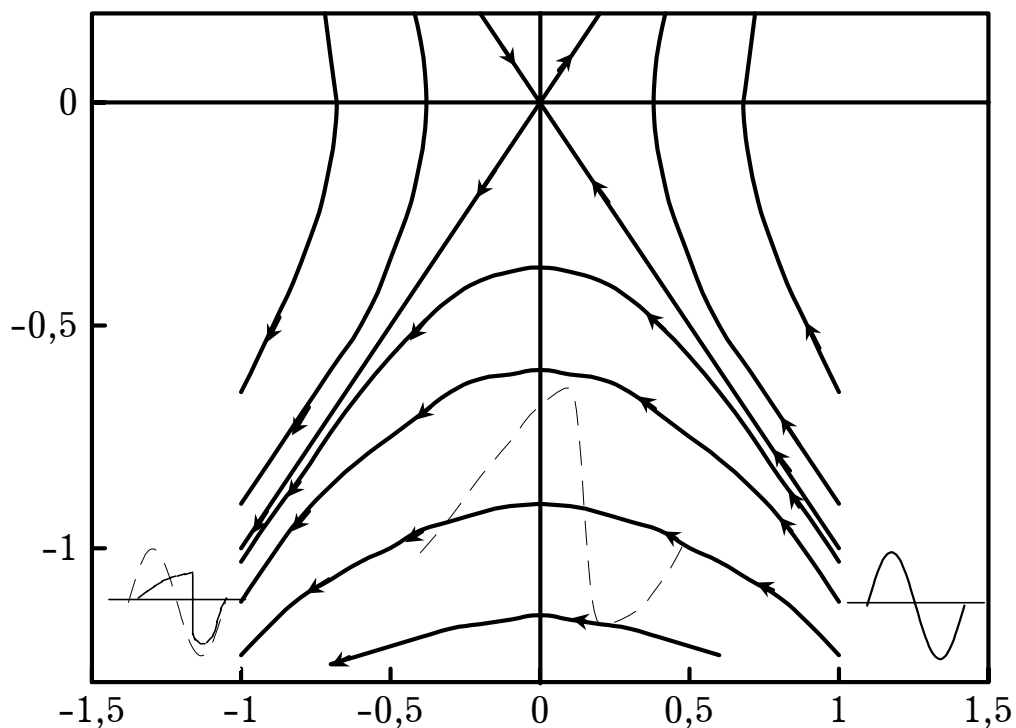
$$L = -\sqrt{I_L^2(\tau_0) + z^2 - 1}, \quad \tau = \tau_0 + \ln \left[ \frac{1 - I_L(\tau_0)}{z + \sqrt{I_L^2(\tau_0) + z^2 - 1}} \right].$$

При определенных условиях в профиле волны образуется неоднозначность, которая может быть устранена проведением разрыва. Правило построения его нетрудно получить из (4.34):

$$\frac{\Omega}{2\pi} \int_{-\pi/\Omega}^{\pi/\Omega} L^2 d\tau - z^2 = L_1^2 - 1 + \frac{W^2}{2}.$$

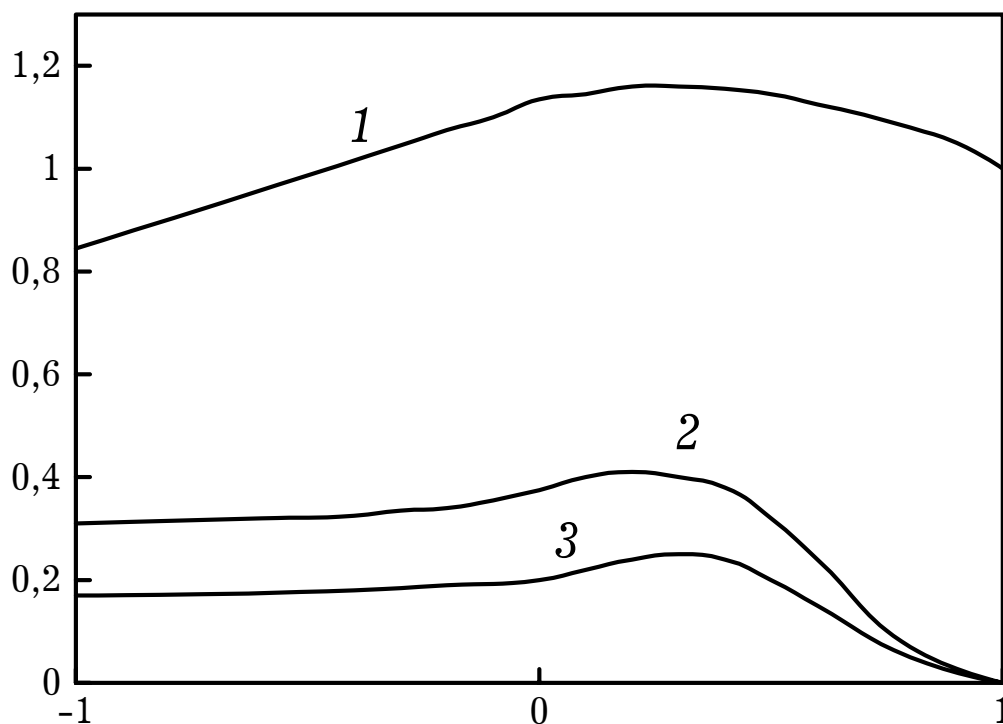
Выписанные соотношения позволяют построить решение задачи. Его удобно анализировать на фазовой плоскости переменных  $(L, z)$  [33], приведенной на рис.4.6. Пространственный профиль волны, то есть зависимость  $L$  от  $z$ , формируется на фазовой плоскости точками, “выпускаемыми” при  $z=1$  по закону  $I_L(\tau)$ . Каждая такая точка движется по своей фазовой траектории  $L = \pm \sqrt{I_L^2 + z^2 - 1}$ . На рис.4.6 - это линии со стрелками, указывающими направление движения точек. Фазовые траектории совпадают с профилем стационарных течений. Чем ближе ордината  $I_L$  выпускаемой точки к -1, тем медленнее она движется. При  $I_L \geq -1$  точки вообще не достигают сечения  $z=-1$ . Тем самым становится ясно, как влияет область неоднородности на звук. Наряду с особенностями, выявленными при анализе линеаризованного уравнения, имеется следующая особенность: проводимость сопла носит диодный характер - не пропускаются части возмущения, заходящие своим профилем выше сепаратрисы  $COС'$  на рис.4.6. На рис.4.7 приведена характерная форма волны после

прохождения критической области ( $z = -1$ ), штриховой линией показаны начальные профили ( $z = 1$ ), для удобства сравнения временной сдвиг компенсирован.



Видно, что при малой амплитуде волны  $W$  профиль искажается незначительно. Искажения начинают проявляться тогда, когда

участки профиля приближаются к величине отсечки  $I_L = -1$ . При этом верхний полупериод искажается много больше, чем нижний. На спектральном языке указанное искажение профиля волны означает обогащение спектра волны высшими гармониками. На рис.4.8 показано, как происходит генерация гармоник при прохождении волной критической области.



Амплитуда первой гармоники вначале растет, несмотря на перекачку энергии от нее к высшим гармоникам. Такое усиление объяснено выше и связано с сужением трубок тока при приближении к критическому сечению. Амплитуды высших гармоник вначале нарастают, а затем из-за диссипации и расширения трубок тока спадают. Эффективность генерации гармоник растет при  $L_1 \rightarrow -1$  и при увеличении  $W$  и  $\Omega$ .

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда возмущения обратной волны на границе  $z=1$  отсутствуют, но есть возмущения попутной волны:



$$I_R(\tau) = W \sin \Omega \tau.$$

Как видно из уравнения (4.34), воздействие попутной волны  $R$  на встречную  $L$  является чисто параметрическим: попутная волна меняет скорость встречной. Однако оказывается, что из-за неоднородности стационарного течения это может привести к довольно эффективной генерации  $L$ -возмущений. Будем для простоты предполагать, что длина падающей  $R$ -волны гораздо больше протяженности рассматриваемой области. Тогда всюду можно считать  $R(z, \tau) = W \sin \Omega \tau$ . Поскольку вне области, где поток однороден, попутная волна не возбуждает встречную, то граничное условие будет таким:  $I_L(\tau) = L_1$ . Так же, как и раньше, сначала рассмотрим решение уравнения (4.34), линеаризованного по возмущениям  $\tilde{L} = L - L_{CT}$  и  $R = I_R(\tau)$ :

$$\tilde{L}(z, \tau) = -\frac{k}{L_{CT}(z)} \int_0^{T(z)} I_R(\tau + \tau' - T(z)) (L_1 \operatorname{sh} \tau' + ch \tau') d\tau',$$

где  $T(z) = \ln[(1 - L_1)/(z - L_{CT})]$  — задержка при движении возмущения по области. Подставим  $I_R(\tau) = W \sin \Omega \tau$  и получим

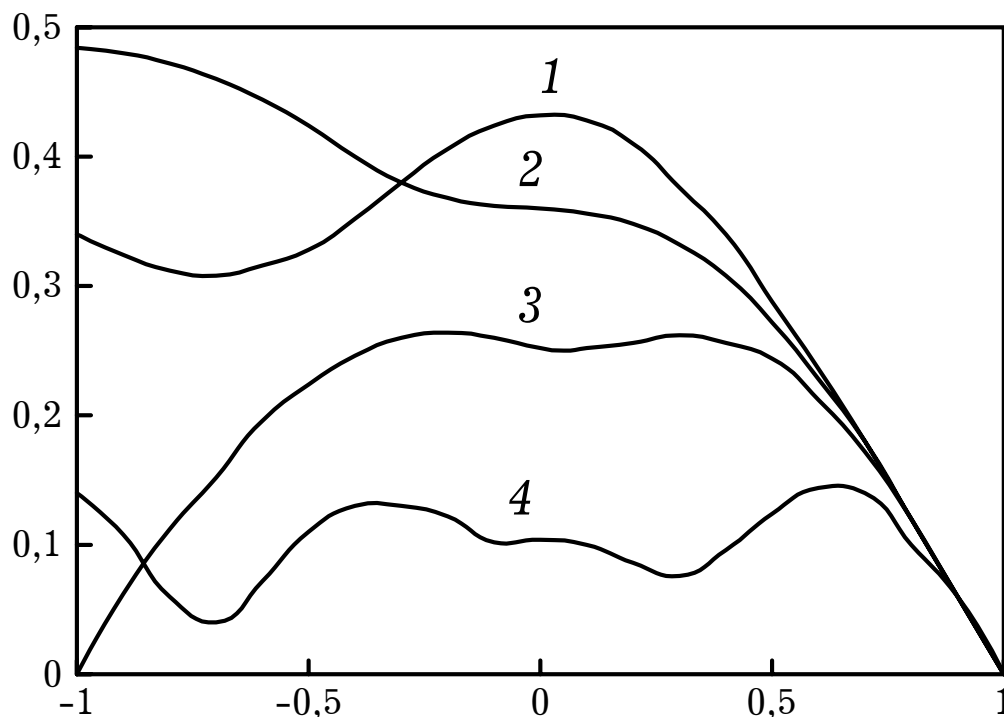
$$\tilde{L}(z, \tau) = -\frac{kW}{1 + \Omega^2} (S \sin \Omega \tau + C \cos \Omega \tau), \quad (4.37)$$

$$S = \cos \Omega T + \frac{\Omega z}{L_{CT}} \sin \Omega T - \frac{L_1}{L_{CT}},$$

$$C = \sin \Omega T - \frac{\Omega z}{L_{CT}} \cos \Omega T + \frac{L_1}{L_{CT}}.$$

Эти выражения задают амплитуду  $G$  и фазу  $\Phi$   $L$ -волны  $\tilde{L} = G \sin(\Omega \tau + \Phi)$ . Видно, что эффективность возбуждения обратной волны зависит от режима течения  $L_1$  и частоты падающего

возмущения  $\Omega$ . На рис.4.9 приведены результаты расчета величины  $G$  по формуле (4.37) для  $L_1 = -1.4$  и нескольких частот.



Характерной особенностью являются пространственные биения амплитуды отраженной волны. Они вызваны тем, что падающая  $R$ -волна меняет свою фазу и гасит ею же рожденные возмущения  $L$ -волны, которые движутся медленно и не успевают покинуть область возбуждения. Так, например, при  $\Omega = 5$  и  $L_1 = -1.4$  (см. рис.4.9) на выходе из области ( $z = -1$ ) амплитуда отраженной волны мала, хотя внутри критической области это не так. Эффективность отражения можно характеризовать величиной  $K = G(z = -1) / W$ , имеющей смысл коэффициента отражения. На рис.4.10 изображена зависимость  $K$  от частоты  $\Omega$  при различных режимах  $L_1$ , она носит характер затухающих осцилляций. При  $L_1 \rightarrow -1$  размах и частота этих осцилляций растут, и при некоторых значениях  $\Omega$  коэффициент отражения достигает значения  $K = 2k$ . Если показатель адиабаты  $\gamma < 5/3$ , то при этом отраженная волна имеет

большую амплитуду, чем падающая. Подчеркнем, что отражение волны от неоднородной области в околосзвуковом потоке происходит совсем по-другому, чем в неподвижной среде. В последнем случае при малой по сравнению с длиной волны протяженности неоднородного участка, как известно, отражения нет. Здесь же амплитуды отраженной и падающей волн могут быть сравнимы по величине, хотя падающая волна не изменяется. Свою энергию отраженная волна черпает из среднего потока.

Обратимся к уравнению (4.34). Неявный вид его решения следующий:

$$z = A \operatorname{sh}(\tau - \tau_0) + B \operatorname{ch}(\tau - \tau_0) - \frac{k W \Omega}{1 + \Omega^2} \cos \Omega \tau,$$

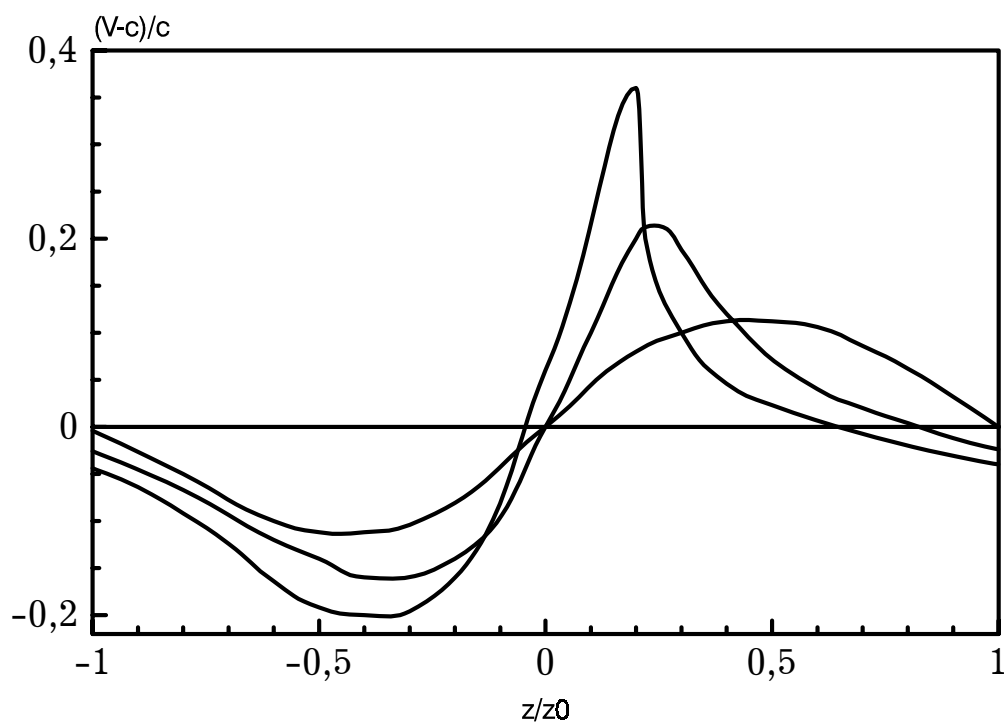
$$L = A \operatorname{ch}(\tau - \tau_0) + B \operatorname{sh}(\tau - \tau_0) - \frac{k W}{1 + \Omega^2} \sin \Omega \tau,$$

$$A = L_1 + \frac{k W}{1 + \Omega^2} \sin \Omega \tau_0, \quad B = 1 + \frac{k W \Omega}{1 + \Omega^2} \cos \Omega \tau_0.$$

На основе этих формул на ЭВМ проводился расчет отраженной волны, то есть величины  $L(z = -1, \tau)$ . Правило проведения разрыва в случае наступления неоднозначности, определяемое из закона сохранения массы, здесь следующее:

$$\int_{-\pi/\Omega}^{\pi/\Omega} (L^2 - L_1^2 + 2 L k W \sin \Omega \tau) d \tau = 0.$$

Характерная форма отраженной волны конечной амплитуды показана на рис.4.11.



С ростом амплитуды падающей волны форма отраженной волны все больше и больше отличается от гармонической, верхний полупериод сужается, нижний расширяется, между ними появляется пологий участок, затем образуется разрыв. Из найденной формы отраженной волны нетрудно вычислить амплитуды гармоник. Расчет показал, что с ростом  $W$  и  $\Omega$  коэффициенты отражения всех гармоник увеличиваются. Это указывает на сильную нелинейность процесса отражения.

Подведем итоги. В данном параграфе решена задача о прохождении гармонических акустических возмущений через критическую область сопла Лавалья при околосзвуковом потоке. Этот случай принципиально отличается от аналогичной задачи в неподвижной среде тем, что встречные акустические возмущения движутся по области неоднородности медленно. Именно поэтому при прохождении встречной звуковой волны через область неоднородности происходит ее нелинейное искажение. Влияние нелинейности тем больше, чем ближе число Маха потока  $M_0$  к

единице и чем больше частота и амплитуда волны. Так как сверхзвуковые участки возмущения не проходят через сопло, то его проводимость имеет диодный характер. Профиль волны искажается несимметрично, происходит генерация высших гармоник. Также из-за медленности движения встречной волны попутное возмущение может заметно возбудить встречное, даже если длина его волны много больше протяженности области неоднородности. Сама попутная волна при этом не меняется. Эффективность возбуждения растет при  $M_0 \rightarrow 1$ , причем зависимость коэффициента отражения от частоты носит осциллирующий характер: на некоторых частотах амплитуда отраженной волны обращается в ноль, а на некоторых - может быть сравнима с амплитудой падающей волны. При конечной амплитуде падающей волны заметно возбуждаются высшие гармоники отраженной волны, форма которой поэтому уже отличается от синусоидальной.